C.
D.
S VII
1000.

Math. P. 494

Mathesis. Geometria generalis

269.

Analytische
Geometrie,

worin
nebst den ersten Gründen der Algebra,
ihre Anwendung auf die Elementar-Geometrie und die Kegelschnitte
enthalten,

von
Nicolaus Schenmark,
Professor der Mathematik bey der Universität zu Lund,
Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften zu
Stockholm, und der Physiographischen Gesell-
schaft zu Lund.

Mit 4 Kupfertafeln.

Aus dem Schwedischen.

Kopenhagen,
bey Christ. Gottl. Proft, Universitäts-Buchhändlern,
1779.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Von den ersten Gründen der Algebra. §. 1–37.

Zweytes Kapitel.

Vom Gebrauch der Algebra zur Auflösung arithmetischer Aufgaben. §. 38–51.

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen, wie auch der arithmetischen und geometrischen Progreßion. §. 52–92.

Viertes Kapitel.

Von der Entstehung der Grössen, und der Anwendung der Algebra auf die ebene Elementar-Geometrie. §. 93–176.

Fünftes Kapitel.

Von der Stereometrie. §. 177 - 215.

Sechstes Kapitel.

Von der Parabel. §. 216 - 239.

Siebentes Kapitel.

Von der Ellipse. §. 240 - 261.

Achtes Kapitel.

Von der Hyperbel. §. 262 - 289.

Neuntes Kapitel.

Anwendung der Stereometrie und der Kegelschnitte zur Erfindung des Inhalts verschiedener körperlicher Figuren. §. 290-306.

Erſtes Kapitel.

Von den erſten Gründen der Algebra.

§. 1.

Die Algebra iſt eine Wiſſenſchaft, welche lehret, wie man aus gewiſſen angenommenen Gröſſen durch Rechnung andere finden kann, die durch jene auf irgend eine Art beſtimmt werden.

§. 2.

Die angenommenen Gröſſen pflegen **bekannte** genannt und mit den erſten Buchſtaben des Alphabets a, b, c, u. ſ. w. bezeichnet zu werden; diejenigen Gröſſen aber, welche durch jene auf eine gewiſſe Art beſtimmt werden, nennt man **unbekannte**, und bezeichnet ſie mit den letzten Buchſtaben des Alphabets, wie x, y, z.

§. 3.

Alle Grössen sind entweder bejahende, positive, oder verneinende, negative. Die ersten sind grösser und die letzten kleiner, als nichts. In der Geometrie siehet man die Grössen, die auf der einen Seite liegen, für bejahte oder positive, und diejenigen, die auf der entgegengesetzten Seite liegen, für verneinte oder negative an.

§. 4.

Den positiven Grössen setzt man das Additionszeichen + (plus) und den negativen das Subtractionszeichen — (minus) vor. Wenn eine Grösse kein Zeichen vor sich hat, wie gewöhnlich ist, wenn sie unter mehrern voran steht, so wird + verstanden, das heißt, man muß die Grösse für positiv halten.

§. 5.

Wenn das Zeichen der Gleichheit = zwischen zwey oder mehr Grössen steht, so zeigt es an, daß das, was an der einen Seite des Zeichens steht, eben so groß ist, als das an der andern Seite desselben befindliche. Z. E. $a = b$ oder $a + b = c + d$. Einen solchen Ausdruck nennt man sodann eine **Gleichung**, **Aequation**, und das, was an der einen oder der andern Seite des Gleichheitszeichens steht, ein **Theil der Gleichung**, (membrum æquationis.)

§. 6.

Eine simple Gleichung (æquatio incomplexa) nennt man diejenige, deren Theile nicht aus mehreren durch + oder — verbundenen Grössen bestehen. In allen andern Fällen heißt die Gleichung zusammen gesetzt, (æquatio complexa), und die in einem oder beyden Theilen derselben befindlichen durch + oder — zusammengefügten Grössen heissen die Glieder der Gleichung.

§. 7.

Wenn eine Zahl oder ein Buchstabe unmittelbar vor einem Buchstaben steht, so zeigt dies an, daß sie würklich in einander multiplicirt worden sind. Z. E. 3a oder ab. Wenn sie aber nicht würklich in einander multipliciret, sondern nur zur Multiplication bestimmt sind, so schreibt man das Multiplicationszeichen (. oder x) zwischen den Factoren, wie z. E. 3xa; a.b. Im Fall einer der Factoren eine zusammengesetzte Grösse (quantitas complexa) ist, so schließt man ihn entweder in Parenthesen ein oder ziehet auch einen Strich über denselben, um anzuzeigen, wie viele Glieder der gegebenen Grösse mit dem übrigen Factoren multiplicirt werden sollen. Z. E. $(a+b).c$ oder $\overline{a+b}.c$; eben so $ab+(c+d).e$ oder $ab+\overline{c+d}.e$; und $ab+(c+d).(a-e)$ oder $ab+\overline{c+d}.\overline{a-e}$.

§. 8.

Wenn zwey Grössen über einander mit einem Strich dazwischen geschrieben sind, so bedeutet dies den Quotienten der oberen Grösse dividirt durch die untere. Z. E. $\frac{a}{b}$. Man kann aber auch $a:b$ schreiben, und eben so kann man anstatt $\frac{a+b}{c+d}$ setzen $\overline{a+b}:\overline{c+d}$ oder $(a+b):(c+d)$.

§. 9.

Besteht ein Product aus einerley Factoren, oder ist eine Grösse mehrmaln mit sich selbst multiplicirt worden, so braucht man, Kürze halber, nur einen Factor und oben rechter Hand neben demselben die Zahl zu schreiben, welche die Anzahl der Factoren andeutet, die alsdann der Exponent genannt wird. Solcher Gestalt ist $aa=a^2$; $aaaaa=a^5$; $(a+b).(a+b).(a+b)=(a+b)^3=\overline{a+b}^3$.

§. 10.

Ein Product gleicher Factoren wird eine Potenz oder eine Dignität genannt. Solcher Gestalt ist a die erste Potenz oder die Wurzel, a^2 die zweyte Potenz oder das Quadrat, a^3 die dritte Potenz oder der Würfel, Cubus u. s. w.

§. 11.

Das Wurzelzeichen $\surd$ vor eine Grösse gesetzt zeigt an, daß man nicht die darunter befind-

liche

liche Grösse selbst, sondern die Wurzel daraus verstanden haben will. In das Wurzelzeichen setzt man den Exponenten, der die Dignität bemerkt, deren Wurzel man ausgezogen haben will; steht aber keine Zahl in dem Wurzelzeichen, so deutet es allemal die Quadratwurzel an. Z. E. $\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$.

§. 12.

Wenn vor einer einfachen Grösse oder vor den Gliedern einer zusammengesetzten Grösse Zahlen stehen, so nennt man diese Zahlen ihre Coefficienten. Z. B. der Grösse $3ab^2+4bcd-2c$ Coefficienten sind 3; 4; und -2. Steht keine Zahl vor einer Grösse, so ist die Einheit ihr Coefficient.

§. 13.

Die einfachen Grössen, welche aus einerley Buchstaben bestehen, sind **Grössen von einerley Art, gleichartige oder homogene Grössen.** Z. E. 3abc und 5abc. In andern Fällen nennt man sie **ungleichartige oder heterogene Grössen.**

§. 14.

In algebraischen Gleichungen, welche geometrische Aufgaben betreffen, müssen alle Glieder gleich viele Dimensionen haben; denn eine Linie kann keiner Fläche, und eine Fläche keinem Körper gleich seyn. Wenn das Gegentheil vorzu-

kommen scheint, so ist es ein Zeichen, daß eine Dimension durch die Einheit ausgedruckt ist. So nach kann nicht $a = bc$ seyn, wenn a nicht als mit einer gewissen Grösse multiplicirt betrachtet wird, die $= 1$ ist, so daß also eigentlich $1.a = bc$ geschrieben werden sollte. In folgenden Gleichungen haben alle Glieder einerley Dimension; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $a = b$; $\frac{ab^2}{c} + ab - \frac{b^3c}{cf} = b^2 + \frac{c^4}{f^2} - cd$.

§. 15.

Einfache gleichartige Grössen, welche einerley Zeichen haben, laßen sich in ein Glied vereinigen, indem man ihre Coefficienten addiret und hinter diese Summe die gemeinschaftliche Grösse schreibt. Z. E. $abc + 4abc + 2abc = 7abc$; $-ab - 4ab = -5ab$. Haben sie dahingegen verschiedene Zeichen, so heben sie einander ganz oder zum Theil auf. Z. B. $5ab - 3ab = 2ab$; $6ab - 8ab = -2ab$; $4ab - 4ab = 0$.

§. 16.

Gegebene Grössen zu einander zu addiren.

Die ungleichartigen Grössen schreibt man bloß mit den vor sich habenden Zeichen zusammen. Die Gleichartigen führet man durch Addition oder Subtraction der Coefficienten (§. 15.) auf ein Glied zurück.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline a+b \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ -b \\ \hline a-b \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4a+2b-2c-5d-g \\ 5a-2b+6c+2d-3g \\ \hline 9a \quad +4c-3d-4g \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 64+4-5-24-6=33 \\ 80-4+12+16-9=95 \\ \hline 144 \quad +7-8-15=128 \end{array}$$

§. 17.

Gegebene Grössen von einander zu subtrahiren.

Man verwechselt die Zeichen in der zu subtrahirenden Grösse und addirt selbige darauf.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline a-b \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ -b \\ \hline a+b \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9a+4c-3d-4g \\ 5a+6c+2d-3g-2b \\ \hline 4a-2c-5d-g+2b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 16 = 16 \\ 8-5 = 3 \\ \hline 16-8+5=13 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b-c \\ \hline a-b+c \end{array}$$

Denn wenn a die Grösse wäre, von welcher b - c abgezogen werden soll, so ist es klar, daß man zuviel von a abzieht, indem man b davon subtrahiret; denn man sollte nur b weniger c davon subtrahiren, oder man sollte vielmehr zuerst c von b, und demnächst beyder Differenz von a abziehen; indem also durch die Subtraction des b zuviel abgezo-

gezogen ist, so muß das, was zuviel weggenommen worden, nemlich c, wieder hinzugeleget werden.

§. 18.

Gegebene Grössen mit einander zu multipliciren.

Sind die gegebenen Grössen einfach, so schreibet man die Factoren ohne Multiplicationszeichen zusammen, und setzet + vor dem Producte, wenn beyde Factoren einerley Zeichen haben, — aber, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Sind zusammengesetzte Grössen gegeben, so multipliciret man sie nach und nach in einander, und addiret die Partial-Producte, wie in der gewöhnlichen Rechnung mit Zahlen. Z. E.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} -a \\ -b \\ \hline ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline -ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} aa = a^2 \\ aaa = a^3 \\ \hline aaaaa = a^{2+3} = a^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad a + b \\ \quad c - d \\ \hline ac + bc \\ -ad - bd \\ \hline ac + bc - ad - bd \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad -ab + b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 - 2 = 6 \\ 3 = 3 \\ \hline 24 - 6 = 18 \end{array}$$

Da die Multiplication eine wiederholte Addition ist, so ist leicht einzusehen, warum + mit + multiplicirt im Producte +, und + mit — multiplicirt im Producte — gibt; denn indem man

man eine positive oder negative Grösse würklich einigemale nimmt, muß das Product nothwendig positiv oder negativ werden. Daß aber — mit — multiplicirt im Producte + gibt, läßt sich so beweisen: Wenn man $a - b$ mit $-c$ multipliciret, so ist das Product $-ac + bc$; denn nimmt man die negative Grösse $-c$ positiv oder würklich a mal, so wird das negative Product $-ac$ zu groß, indem man $-c$ nur a weniger b mal nehmen sollte, folglich muß das, was zuviel weggenommen ist, nemlich b mal c, wieder hinzugelegt werden, und also das Zeichen + bekommen.

§. 19.

Potenzen, welche einerley Wurzel haben, werden mit einander multipliciret, indem man ihre Exponenten addiret. Z. E. $a^n . a^m = a^{n+m}$; $(a+b)^2 . (a+b)^3 = (a+b)^5$.

§. 20.

Gegebene Grössen mit einander zu dividiren.

Sind einfache und dabey ungleichartige Grössen gegeben, so schreibt man den Quotienten in Gestalt eines Bruchs (§. 8.) Besteht der Dividendus zum Theil aus den Grössen, welche der Divisor enthält, so schreibt man die übrigen des Dividendus im Quotienten. In Absicht auf die

Zeichen gilt eben die Regel, wie bey der Multiplication, (§. 18.) nemlich daß einerley Zeichen +, verschiedene aber — geben. Mit zusammengesetzten Grössen verfährt man hier, wie in der Rechenkunst. Z. E.

$$b)\,a\,(\tfrac{a}{b} \qquad a)\,ab\,(b \qquad 2a)\,6ab\,(3b$$

$$b)\,ab+bc-bd\,(a+c-d$$

$$\begin{array}{l} a+b)\,ac+bc-ad-bd\,(c-d \\ \quad\quad\;\; ac+bc \\ \hline \quad\quad\;\; 0 \quad -ad-bd \\ \quad\quad\quad\quad\; -ad-bd \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\,a^2-b^2\,(a-b \\ \quad\quad a^2+ab \\ \hline \quad\quad -ab-b^2 \\ \quad\quad -ab-b^2 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$$a)\,ab+cd\,(b+\tfrac{cd}{a}$$

$$aa)\,aaaaa\,(aaa \qquad a^2)\,a^5\,(a^{5-2}=a^3$$

$$a+b)^3)\,(a+b)^5\,(a+b)^2$$

Indem die Division auflöset, was die Multiplication zusammensetzet, und der Divisor, multiplicirt mit dem Quotienten, allemal den Dividendus hervorbringt, so ist klar, daß die Regel für die Zeichen + und — hier statt findet.

§. 21.

Wenn Potenzen, die einerley Wurzeln haben, in einander dividirt werden sollen, so subtrahirt man den Exponenten des Divisors vom Expo-

Exponenten des Dividendus, um den Exponenten des Quotienten zu erhalten. Z. E. $a^n) a^m (a^{m-n}$; $a^5) a^3 (a^{-2}$.

§. 22.

Wenn eine Grösse a mit einer andern b multiplicirt, und mit eben derselben Grösse b wiederum dividirt wird, so bleibt die Grösse a unverändert. Denn $\frac{ab}{b} = a$; $\frac{3.5}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

§. 23.

Löschet man einen Factor b in dem Zähler des Bruchs $\frac{ab}{cd}$ aus, so ist dies eben so viel, als wenn man den Bruch mit diesem Factor dividiret hätte, und der Quotient ist also in diesem Falle $\frac{a}{cd}$. Löscht man den Factor d aus dem Nenner weg, so ist dies anzusehen, als wenn der Bruch mit d multiplicirt wäre; solcher Gestalt ist $\frac{a}{cd} \times d = \frac{a}{c}$. Umgekehrt ist b. $\frac{a}{cd} = \frac{ab}{cd}$; $\frac{a}{cd} : e = \frac{a}{cde}$. Weiter ist $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ (§. 22.)

§. 24.

Aus der Arithmetik wird man sich erinnern, daß Brüche, welche addirt oder subtrahirt werden sollen, zuvor zu einerley Benennung gebracht werden müssen. Also ist $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} =$

$\frac{ad \pm bc}{bd}$. Das Product zweyer Brüche $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ist $= \frac{ac}{bd}$; denn man setze $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, so ist $a = bm$ (§. 23.) $c = dn$, folglich $ac = bmdn$ und $\frac{ac}{bd} = mn = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$. Aus eben den Gründen ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; denn $\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$, $\frac{a}{bc} = \frac{m}{dn}$ (§. 23.) und $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

§. 25.

Ich setze als aus der Arithmetik bekannt voraus, wie man die Quadrat- und Cubicwurzel aus einer Zahl ziehen soll, die erste nach der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und die zweyte vermittelst der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Aus algebraischen Grössen werden die Wurzeln auf eben der Art ausgezogen. Zum Beyspiel, für Quadratwurzeln

$$9y^2 + 12xy + 4x^2 - 6dy - 4dx + d^2 \,\big(\, 3y + 2x - d$$

$$x^2 = 9y^2$$

$$\overline{ + 12xy + 4x^2 - 6dy - 4dx + d^2}$$

$2a = 6y$, also $2ab = 12xy$

$$b^2 = \quad + 4x^2$$

$$\overline{ - 6dy - 4dx + d^2}$$

$2a = 6y + 4x$; folglich $2ab = -6dy - 4dx +$

$$b^2 = \quad + d^2$$

$$\overline{ 0 }$$

Für

Für Cubicwurzeln

$$\begin{array}{l} y^3 + 6y^2x + 12x^2y + 8x^3 \,\big)\, y + 2x \\ a^3 = y^3 \\ \hline \quad + 6y^2x + 12x^2y + 8x^3 \\ 3a^2 = 3y^2 \text{ also } 3a^2b = . 6y^2x \\ \quad 3ab^2 = \quad + 12x^2y \\ \quad b^3 = \quad + 8x^3 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

§. 26.

In algebraischen Gleichungen kommen bekannte und unbekannte Grössen (§. 2.) durch einander gemischt vor, und da man mit denselben zur Absicht hat, den Werth der unbekannten Grösse zu erfahren, so muß man diese von den bekannten absondern, das heißt, man muß die gegebene Gleichung dergestalt verändern, daß man zuletzt eine Gleichung erhält, von welcher der eine Theil bloß aus bekannten Grössen, der zweyte aber aus der gesuchten unbekannten Grösse besteht, die alsdann nicht mehr unbekannt ist, indem man den Werth derselben und die Art, wie sie durch die bekannten Grössen bestimmt wird, weiß. Bey dieser Veränderung der Gleichung kommen die vorhin angeführten Rechnungsarten zu statten, und hat man dabey vor allen Dingen zu beobachten, daß die Gleichheit zwischen den beyden Theilen der Gleichung beybehalten werde, wie sehr man sie sonst auch verändere.

§. 27.

§. 27.

Die Art und Weise, wie die unbekannte Grösse von den bekannten abzusondern ist, wird in folgenden Regeln gelehret, welche als die allgemeinsten am häufigsten vorkommen.

1 Regel. Wenn man zu den beyden gleichen Theilen einer Gleichung einerley oder gleiche Grössen addiret; oder von beyden Theilen einerley Grössen subtrahiret; oder wenn man beyde Theile mit einerley Grösse multipliciret oder dividiret; oder wenn man aus beyden Theilen Wurzeln von einerley Art ziehet, oder sie zu einerley Potenz erhebet; so werden die Summen, Differenzen, Producte, Quotienten, Wurzeln oder Potenzen an beyden Seiten des Gleichheitszeichens allemal gleich groß seyn.

§. 28.

2 Regel. Man kann jede Grösse von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andere bringen, wenn man ihr Zeichen verändert. Z. E. Wenn $3+7=6+4$, so ist $3+7-6=4$; und $3+7-6-4=0$. Wenn $a+b=c-d$, so ist $a+b+d=c$.

§. 29.

Hieraus folgt, daß alle Glieder einer Gleichung positive werden können, wenn man die negativen auf die entgegengesetzte Seite des Gleichheitszeichens bringt. Eine ganze Gleichung kann

$=0$

$= 0$ gesetzt werden. Wenn man die Zeichen von allen Gliedern einer Gleichung verwechselt, so wird dennoch Gleichheit zwischen den beyden Theilen der Gleichung erhalten.

§. 30.

3 Regel. Eine Gleichung, welche Brüche enthält, wird davon befreyet, wenn man alle Glieder mit dem Nenner des Bruchs multipliciret. Z. E. Es ist $a + b = \frac{d^2}{c}$, folglich $ac + bc = d^2$. Wenn $\frac{ab}{a-b} + b = c$, so ist $ab + ab - b^2 = ac - bc$, oder $2ab - b^2 = ac - bc$. Aus $dx + \frac{b^2c}{a} - c^2 = d^2 - \frac{a^2d}{c} + bc$ erhält man $adx + b^2c - ac^2 = ad^2 - \frac{a^3d}{c} + abc$, und weiter $acdx + b^2c^2 - ac^3 = acd^2 - a^3d + abc^2$; eine Gleichung, welche frey von Brüchen ist.

§. 31.

4 Regel. Wenn die unbekannte Grösse, welche man alleine zu bringen sucht, mit einer bekannten Grösse multipliciret ist, so muß die ganze Gleichung mit der letztern dividirt werden, und umgekehrt. Z. E. $ax = b^2 - c^2$, folglich $x = \frac{b^2 - c^2}{a}$; $\frac{x}{a} = cd - ed$, also $x = acd - aed$. Wenn $ay - by = a^2 + b^2$, so ist $y = \frac{a^2 + \ 2}{a-b}$.

§. 32.

Wenn alle Glieder einer Gleichung mit einer und derselben Grösse multiplicirt oder dividirt sind, so wird die Gleichung dadurch einfacher, daß man mit der gemeinschaftlichen Grösse dividirt oder multiplicirt. Z. E. Wenn $15b^2 = 24ab + 3bx$, so ist $5b = 8a + x$. Wenn $a^2 + ab = ac - ad$, so ist $a + b = c - d$.

§. 33.

5. Regel. Wenn ein Glied einer Gleichung, welches die unbekannte Grösse enthält, irrational ist, so müssen alle übrige Glieder auf die andere Seite gebracht (§. 28.) und von der Irrationalgrösse abgesondert werden, und demnächst müssen beyde Theile der Gleichung zu derjenigen Potenz erhoben werden, welche das Wurzelzeichen angibt. Z. E. $\sqrt{a^2 - ax} + a = x$, folglich $\sqrt{a^2 - ax} = x - a$, und endlich $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$; welche Gleichung von dem Irrationalausdrucke frey ist.

§. 34.

6. Regel. Wenn man eine Gleichung dergestalt verändern kann, daß der eine Theil aus lauter bekannten Grössen bestehet, der zweyte aber, der die unbekannte Grösse enthält, ein vollkommnes Quadrat oder Cubus ist, so wird die Wurzel aus beyden Theilen der Gleichung gezogen, wodurch alsdenn die unbekannte Grösse nur eine

Di-

Dimension behält. Z. E. $x^2 = ab - cd$, folglich $x = \sqrt{ab - cd}$. Wenn $y^3 = abc - bcd$, so ist $y = \sqrt[3]{abc - bcd}$. Wenn $z^2 - 2az + a^2 = ab$, so ist $z - a = \sqrt{ab}$ und $z = a + \sqrt{ab}$.

§. 35.

7. **Regel.** Eine unvollkommne quadratische Gleichung kann vollkommen gemacht werden, wenn man die zusammengehörigen Glieder auf ihre gehörige Seite bringt, zu den daraus entstandenen beyden Theilen der Gleichung dasjenige addiret, was an der einen Seite an einem vollkommenem Quadrat fehlet, und demnächst die vorhergehende Regel anwendet.

Z. E. hat man die Gleichung $x^2 = 2ax + b^2$

so erhält man daraus $x^2 - 2ax = b^2$

Addirt man das fehlende $a^2 = a^2$

so erhält man im ersten Theile ein vollkommnes Quadrat. $x^2 - 2ax + a^2 = a^2 + b^2$

Ziehet man aus beyden Theilen die Wurzel $x - a = \sqrt{a^2 + b^2}$

so erhält man endlich $x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$

§. 36.

Hieraus entspringt die allgemeine Formel: Wenn $x^2 = .\,px\,.\,q$, so ist $x = .\,\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2\,.\,q}$, welche den Werth der unbekannten Grösse gibt, wenn sie nur im ersten und zweyten Grade in der Gleichung vorhanden ist.

Wenn $y^2+3y=4$, so ist $y^2=-3y+4$, $p=-3$, $q=4$ und $y=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}=1$ oder -4.

Wenn $z^2+6z+9=0$, so ist $z^2=-6z-9$; $p=-6$; $q=-9$ und $z=-3\pm\sqrt{9-0}=-3\pm0$ $=-3$.

§. 37.

8 Regel. Wenn mehr als eine unbekannte Grösse in einer Gleichung vorkommt, so müssen so viele Gleichungen gegeben seyn, als unbekannte Grössen da sind, wenn anders der Werth derselben soll gefunden werden können. Man sucht hierauf den Werth von einer der unbekannten Grössen aus der einen Gleichung und setzt ihn in die andere, wodurch denn die eine unbekannte Grösse weggeschafft ist, und worauf der Werth der zweyten nach den vorhergehenden Regeln gefunden werden kann, wenn nur zwey unbekannte Grössen da sind. Sind mehr als zwey unbekannte Grössen vorhanden, so können sie auf eben diese Art gefunden werden.

Wenn $a+z=y+b-c$ und $z=d+e$, so ist $a+d+e=y+b-c$, und demnächst $a+d+e-b+c=y$.

Wenn $x+y=z+a$; $y+z=b+x$; $x+z=c+y$ so ist $x+y-a=z$. Setzet man diesen Werth von z in die beyden andern Gleichungen, so ist $2y+x-a=b+x$; $2y-a=b$; $2y=a+b$;

y=

$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; und $2x + y - a = c + y$; oder $2x - a = c$; $2x = a + c$; $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$; woraus endlich $z = x + y - a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ gefunden wird.

Wenn $x^2 = ay + b^2$ und $x = a - c$, so ist $x^2 = a^2 - 2ac + c^2$ und $a^2 - 2ac + c^2 = ay + b^2$; $a^2 - 2ac + c^2 - b^2 = ay$; $a - 2c + \frac{c^2 - b^2}{a} = y$.

Zweytes Kapitel.

Vom Gebrauch der Algebra zur Auflösung arithmetischer Aufgaben.

§. 38.

Wenn eine Aufgabe vorgegeben ist, so muß man erwägen, wie viele bekannte und unbekannte Grössen in derselben vorkommen, und sie gehörig mit Buchstaben bezeichnen, (§. 2.). Hierauf sieht man zu, wie jedwede Bedingung der Aufgabe durch die gewählten Buchstaben ausgedruckt, und solcher gestalt in die analytische Sprache übersetzt werden mag, worauf man denn zu sagen pflegt, die Aufgabe sey auf eine Gleichung gebracht. Wenn dies geschehen ist, so bedient man sich der vorigen Regeln, um dadurch die verschiedenen Gleichungen, wenn deren mehrere gegeben sind, durch Wegschaffung einiger Buchstaben in eine zu verwandeln, worin, wo möglich

nicht mehr als eine unbekannte Grösse vorkommt. Diese Gleichung wird endlich auf eine so einfache Gestalt gebracht, als möglich ist, wodurch denn endlich die unbekannte Grösse mit einer bekannten verglichen wird.

§. 39.

1 Aufgabe. Ein Mann hat einige Ducaten in einem Beutel; er legt nachmals 12 Stück hinzu, und, nachdem er darauf 20 davon ausgegeben, findet er, daß 15 Stück übrig sind. Es ist die Frage, wie viele er anfangs in dem Beutel gehabt.

Man setze diese unbekannte Anzahl $= x$, so ist den Bedingungen der Aufgabe zufolge $x + 12 - 20 = 15$, und also $x = 15 + 20 - 12 = 23$.

§. 40.

2 Aufgabe. Drey Personen gewannen im Spiel zusammen 72 Thaler; der zweyte gewann doppelt soviel als der erste und noch 3 Thaler dazu; der dritte gewann so viel als der erste und zweyte zusammen, und sechs Thaler darüber. Es frägt sich, wie viel ein jeder von ihnen gewonnen?

Man setze A habe gewonnen x Thaler, so war des B Gewinn $2x + 3$, und des C $3x + 3 + 6$, folglich ist $x + 2x + 3 + 3x + 3 + 6 = 72$; $6x + 12 = 72$; $6x = 60$; $x = 10$. Demnach

war

war der Gewinn von A = 10 Thaler, von B = 23, von C = 39; und 10 + 23 + 39 = 72.

§. 41.

3 Aufgabe. Ein Mann geht mit 105 Thalern auf den Markt, und kauft dafür eine Gans, eine Kuh und ein Pferd. Die Kuh kostete 30 mal so viel als die Gans; und das Pferd bezahlte er bis auf 16 Thaler noch 3 mal so theuer als die Kuh. Man will wissen, was jedwedes Stück Vieh gekostet?

Gesetzt die Gans kostete X Thaler, so ist $x + 30x + 90x - 16 = 105$; $121x - 16 = 105$; $121x = 121$ und $x = 1$.

§. 42.

4 Aufgabe. Wie sollen 123 Thaler, so unter drey Personen vertheilt werden, daß die zweyte 2 Thaler mehr, als die erste, und die dritte 5 Thaler weniger, als die erste und zweyte zusammengenommen bekommt?

Hier ist $x + x + 2 + 2x + 2 - 5 = 123 = 4x - 1$, folglich $4x = 124$ und $x = 31$.

§. 43.

5 Aufgabe. Vier Personen schiessen 6574 Thaler zusammen, um Güter dafür zu kaufen; der zweyte erlegte bis auf 51 Thaler noch 3 mal so viel als der erste, der dritte $\frac{1}{3}$ so viel als der er-

ste und zweyte zusammen, und der vierte $1\frac{1}{2}$ mal so viel als der erste. Es wird gefragt, wie viel ein jeder von ihnen zuschoß?

Man setze A gab X Thaler her, so erlegte B, $3x - 51$; C, $\frac{4x-51}{3}$; und D, $\frac{3x}{2}$. Hierdurch erhält man die Gleichung $x + 3x - 51 + \frac{4x-51}{3} + \frac{3x}{2} = 6574$. $6x + 18x - 306 + 8x - 102 + 9x = 6574 + 6$; (§. 30.) $41x - 408 = 39444$; $41x = 39852$; $x = 972$.

A erlegte		x	$= 972$
B	= =	$3x - 51$	$= 2865$
C	= = =	$\frac{4x-51}{3}$	$= 1729$
D	= = =	$\frac{3x}{2}$	$= 1458$
		Summa =	6574

§. 44.

6 Aufgabe. Was ist das für eine Zahl, von welcher, nachdem man 9 davon subtrahiret hat, der Siebente Theil des Restes $= 39$ ist?

$\frac{x-9}{7} = 39$; $x - 9 = 7 + 39 = 273$; $x = 282$.

§. 45.

7 Aufgabe. Jemand wollte an einige Arme Almosen austheilen. Um einem jeden 5 Schillinge zu geben, fehleten ihm 7 Schillinge. Er gab

gab darauf einem jeden 3 Schillinge, und behielt 9 übrig. Es frägt sich, wie viele Schillinge er bey sich hatte, und wie viele Arme da waren?

Setzt man die Anzahl der Armen $= x$, so ist $5x - 7 = 3x + 9$; $2x = 16$; und $x = 8$.

§. 46.

8 Aufgabe. Jemand wurde gefragt, wie alt er sey, und antwortete: Wenn man $\frac{1}{4}$ meines Alters von dem Ganzen abziehet, und zu dem Rest $\frac{1}{3}$ meines Alters addiret, so übersteigt die Summe mein wahres Alter um 3 Jahre. Wie alt war er?

Setzet man sein Alter $= x$ Jahre, so hat man $x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x + 3$; $\frac{13}{12}x = x + 3$; $13x = 12x + 36$; und $x = 36$.

§. 47.

9 Aufgabe. Welche Zahl muß man mit 16 multipliciren, damit, wenn man von der Quadratwurzel des Products 3 subtrahirt, 5 übrig bleibt?

$$\sqrt{16x} - 3 = 5;\ \sqrt{16x} = 8;\ 16x = 64;\ x = \frac{64}{16} = 4.$$

§. 48.

10 Aufgabe. Man fragte eine Jungfer, wie alt sie sey? Sie gab zur Antwort: Als ich geboren wurde, war meine Mutter 40 Jahre alt, und multipliciret man meiner Mutter itziges Alter mit dem meinigen, so kommt Methusalems Alter

heraus, der 969 Jahre lebte. Wie alt war sie denn nun?

Ihr Alter sey $=x$, so ist $x(x+40)=969$. Also $x^2+40x=969$; $x^2=-40x+969$; $x=-20\pm\sqrt{400+969}=-20\pm37$. (§. 35.) Sie war also 17 Jahre alt.

§. 49.

11 Aufgabe. Einer kauft für 744 Thaler Rocken und Haber; er erhielt doppelt so viele Tonnen Haber als Rocken, und bezahlte den Rocken mit 13 und den Haber mit 9 Thaler. Wie viele Tonnen von jeder Sorte bekam er nun?

Man setze, er habe erhalten x Tonnen Rocken und y Tonnen Haber, so ist $13x+9y=744$; und $2x=y$. Mithin $13x+18x=744$; $31x=744$; $x=24$ und $y=2x=48$. Es ist auch $24+13=312$; $48+9=432$; und $312+432=744$.

§. 50.

12 Aufgabe. Einem Hirten wurde von einer Räuberbande die Hälfte seiner Heerde Schafe und noch dazu $\frac{1}{2}$ Schaf gestohlen; eine zweyte Räuberbande nahm hierauf die Hälfte des Uebriggebliebenen und $\frac{1}{2}$ Schaf dazu; eine dritte Räuberbande behandelte ihn endlich eben so, worauf er nur noch 5 Schafe übrig behielt. Man will wissen, wie groß seine Heerde anfangs gew ?

Man

Man setze die Anzahl seiner Schafe sey gewesen $=x$, die zuerst übrig behaltenen $=y$ und die zum zweytenmale übrig behaltenen $=z$, so ist den Bedingungen der Aufgabe zufolge

$x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+y \quad y=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}+z \quad z=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}+5$

$\frac{x-1}{2}=y \quad \frac{y-1}{2}=z \quad \frac{z-1}{2}=5$

also ist $z=11$; $y=23$ und $x=47$.

§. 51.

Eine Zahl, so in drey Theile zu theilen, daß der zweyte Theil gleich ist der Summe von einer gegebenen Zahl und dem ersten Theil mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, und daß der dritte Theil gleich ist der Summe von einer andern gegebenen Zahl und der ersten multiplicirt mit einer andern gegebenen Zahl.

Man setze den ersten Theil $=x$, den zweyten $=ax+f$, und den dritten $=bx+g$; die zu theilende Zahl sey $=n$, so ist

$x+ax+f+bx+g=n$; $x(a+b+1)+f+g=n$;

$x(a+b+1)=n-f-g$ und $x=\frac{n-f-g}{a+b+1}$.

Wenn zum Exempel $n=31$; $a=3$; $f=5$; $g=-8$; $b=\frac{1}{4}$, so ist $x=\frac{31-5+8}{3+\frac{1}{4}+1}=\frac{34}{4+\frac{1}{4}}$ $=\frac{34 \cdot 4}{17}=\frac{136}{17}=8$.

Denn wenn der erste Theil $x = 8$
so ist der zweyte $3x + 5 = 29$
und der dritte $\frac{1}{4}x - 8 = -6$
dessen Summe $= 31 = n$

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen, wie auch der arithmetischen und geometrischen Progreßion.

§. 52.

Grössen von einerley Art oder homogene Grössen sind solche, von welchen es sich begreiffen läßt, daß die eine so oft genommen werden kann, bis sie grösser wird, als die zweyte. Im entgegengesetzten Falle nennt man die Grössen von verschiedener Art, oder heterogene Grössen.

§. 53.

Ein Verhältniß ist die Beschaffenheit, welche man zwischen Grössen von einerley Art antrifft, indem die eine einem gewissen Theil von der andern in sich enthält.

§. 54.

Dieses Verhältniß erforschet man dadurch, daß man die eine Grösse mit der andern dividiret,

da denn der Quotient ausweiset, wie vielmal die eine Grösse die andern in sich enthält.

§. 55.

Wenn man die erste zweyer Grössen oder das vorhergehende Glied des Verhältnisses a mit der zweyten oder dem nachfolgenden Gliede b dividiret, so nennt man den Quotienten $\frac{a}{b}$ den **Exponenten** des Verhältnisses zwischen a und b.

§. 56.

Wenn zwey Grössen a und b in Absicht auf ihr Verhältniß zu einander betrachtet werden, so schreibt man das Zeichen (:) zwischen dem vorhergehendem und nachfolgendem Gliede. Z. E. a : b.

§. 57.

Man sagt, daß vier Grössen eine **Proportion** ausmachen, oder daß zwischen ihnen eine Analogie ist, wenn beyde Verhältnisse einerley Exponenten haben. Sonach haben a und b einerley Proportion mit c und d, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und umgekehrt.

§. 58.

Wenn vier Grössen eine Proportion ausmachen, so schreibt man selbige folgender Gestalt, a : b = c : d, oder a : b : : c : d; wodurch gesagt wird, a verhalte sich zu b wie c zu d; oder a enthalte

halte b eben so vielmale als c die Grösse d enthält. So ist 4 : 2 = 12 : 6 und 5 : 15 = 7 : 21.

§. 59.

Eine Proportion heißt zusammenhängend (continua), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist; wie a : b = b : c; und dann ist b die **mittlere Proportionalgrösse** zwischen a und c. In allen andern Fällen ist die Proportion nicht zusammenhängend (discreta).

§. 60.

Die Fortsetzung einer zusammenhängenden Proportion wird eine Progreßion genannt, da man denn aller Proportionen gemeinschaftlichen Exponenten nomen rationis zu nennen pflegt. Wenn a : b = b : c = c : d = d : e u. s. w. so sagt man, daß a, b, c, d, e, u. s. w. eine geometrische Progreßion ausmachen, und schreibt diese so ∺ a, b, c, d, e, u. s. w. Hier sind b und c zwey **mittlere Proportionalgrössen** zwischen a und d; eben so sind b, c, d drey mittlere Proportionalgrössen zwischen a und e; u. s. w.

§. 61.

Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ oder a : b kann auf dreyerley Art verstanden werden, entweder als ein Quotient, und dann zeiget a den Dividendus, b den Divisor an (§. 20.); oder als ein Bruch (§. 23.) da denn a der Zehler und b der Nenner ist; oder

auch

auch als ein Verhältniß, da denn a das vorhergehende und b das nachfolgende Glied ist. Man wird es leicht einsehen (§. 55.), daß diese dem Anscheine nach verschiedene Ausdrücke im Grunde einerley sind.

§. 62.

Die erwähnten Verhältnisse, **Proportionen** und **Progreßionen** heissen **geometrische**, in Vergleichung mit anderen, welche man **arithmetische** nennet, in welchen das Verhältniß der Glieder durch die Subtraction gefunden wird.

§. 63.

Vier Grössen stehen in **arithmetischer Proportion**, wenn die erste die zweyte um eben so viel übertrift, als die dritte die vierte; und wird so geschrieben $a - b = c - d$; oder auch $a - b \therefore c - d$. Z. E. $8 - 5 = 12 - 9$, worin der Ueberschuß 3 ist, oder $6 - 8 = 9 - 11$, worin der Ueberschuß -2 ist. Insbesondere sind dieses **unzusammenhängende** (discreta) arithmetische Proportionen. In den **zusammenhängenden** (continua) findet sich eine und dieselbige Grösse im zweyten und dritten Gliede; wie $a - b = b - c$, welches, durch mehrere Glieder fortgesetzt, eine **arithmetische Progreßion** ausmacht, die so geschrieben wird $\div$ a, b, c, d, e, u. s. w. **Differenz der Glieder** nennt man die Zahl, welche herauskommt, wenn man irgend ein Glied von dem nächstfolgenden abziehet.

het. In der Progreßion 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w. ist 2 die Differenz der Glieder.

§. 64.

Verschiedene Umsetzungen der vier Glieder einer geometrischen Proportion haben besondere Namen bekommen. Man sagt, daß die neue Proportion aus der ersten $a : b = c : d$
entstanden sey alternando, wenn $a : c = b : d$
invertendo, = $b : a = d : c$
componendo, $a+b : b = c+d : d$
dividendo, = $a-b : b = c-d : d$
convertendo, = $a : a-b = c : c-d$

hat man $a : b = c : d$ und
$b : f = d : h$ ordinate, so nennt man
diese $a : f = c : h$ daraus gefolgerte Proportion ordinate et ex æquo.

Hat man $a : b = c : d$ und
$b : f = g : c$ perturbate, so nennt
man die Proportion $a : f = g : d$ perturbate et ex æquo.

§. 65.

Wenn vier Grössen in geometrischer Proportion stehen, $a : b = c : d$ so ist das Product der äussern Glieder gleich dem Product der mittleren, oder $ad = bc$.

Denn, wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§. 57.) und $a = \frac{bc}{d}$ (§. 23.) folglich $ad = bc$.

An-

Anders. Man setze $\frac{a}{b} = f$, so ist auch $\frac{c}{d} = f$ (§. 57.), $a = bf$ und $c = df$. Es ist aber $a : b = c : d$, also ist $bf : b = df : d$, und wenn man nunmehr Producte der äussern und mittleren Glieder macht, so ist sichtbar, daß $bdf = bdf$ oder $d . bf = b . df$ oder $ad = bc$.

§. 66.

Hieraus folget, daß, wenn $a : b = b : c$; $ac = b^2$ sey, daß $a : b = c : x$ gebe $ax = bc$ und $x = \frac{bc}{a}$, daß aus $a : b = b : y$ entstehe $y = \frac{b^2}{a}$ und daß aus $a : z = z : b$, $z^2 = ab$ und $z = \sqrt{ab}$ gefunden werde.

§. 67.

Wenn vier Grössen von der Beschaffenheit sind, daß das Product der beyden ersten gleich ist dem Product der beyden letzten, $ad = bc$ und man macht die beyden ersten zu äusseren, die beyden letzten aber zu inneren Gliedern, so ist eine Proportion $a : b = c : d$ zwischen den Gliedern in ihrer anfänglichen Ordnung da.

Denn weil $ad = bc$, so ist $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und folglich $a : b = c : d$. (§. 57.)

§. 68.

Wenn $a : b = c : d$, so ist $b : a = d : c$ (Eucl. El. V. Prop. 4. Corr.) denn der Bedingung zufolge

folge ist $ad = bc$ (§. 65.) und hieraus weiter $b : a = d : c$. (§. 67.)

§. 69.

Wenn $a : b = c : d$, so ist $a : c = b : d$ (V. 16.). Denn $ad = bc$, und hieraus folgt das zu beweisende.

§. 70.

Wenn $a : b = c : d$, so ist $a + b : b = c + d : d$ (V. 18.). Denn $ad + bd = bc + bd$, weil $ad = bc$ und nach geschehener Substitution $ad + bd = ad + bd$.

§. 71.

Wenn $a : b = c : d$, so ist $a - b : b = c - d : d$ (V. 17.). Denn indem $ad = bc$, so ist auch $ad - bd = bc - bd$.

§. 72.

Wenn $a : b = c : d = e : f$, so ist $a + c + e : b + d + f = a : b$ (V. 12.).

Denn weil $ad = bc$, und $af = be$, so muß auch $ab + bc + be = ab + ad + af$ seyn, wenn man den Werth für ad und af substituirt.

§. 73.

Wenn $a : b = e : f$ und $c : d = e : f$, so ist $a : b = c : d$. (V. 11.)

Denn wenn $\frac{a}{b} = g$, so ist auch $\frac{e}{f} = g$; es ist aber auch $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$, also ist $\frac{c}{d} = g$, und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, woraus denn $a : b = c : d$ wird.

§. 74.

Wenn $a:b=c:d$, so ist $a-c:b-d=a:b$. (V. 5.) Indem $ad=bc$, so ist auch $ab-bc=ab-ad$.

§. 75.

Das Verhältniß der Theile zu einander ist einerley mit dem Verhältniß ihrer Gleichvielfachen (V. 15.) oder $a:b=ac:bc$.

Denn hier ist $abc=abc$.

§. 76.

Aus eben den Gründen ist $a:b=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$.

§. 77.

Wenn $a:b=c:d$, und $b:f=d:h$, so ist $a:f=c:h$. (V. 22.)

Denn $ad=bc$; $bh=fd$, deswegen auch $abdh=bcdf$, oder $ah=cf$, und demnach $a:f=c:h$.

§. 78.

Wenn $a:b=c:d$ und $b:f=g:c$, so ist $a:f=g:d$. (V. 23.)

Denn da $ad=bc$ und $bc=fg$, so hat man $ad=fg$, und folglich $a:f=g:d$.

§. 79.

Wenn $a:b=c:d$, und $e:f=g:h$, so ist $ae:bf=cg:dh$.

Denn aus $ad=bc$, und $eh=fg$, wird $adeh=bcfg$, und demnach $ae:bf=cg:dh$.

§. 80.

Hieraus folget, daß wenn $a:b=c:d$, so ist auch $a^2:b^2=c^2:d^2$, und $a^3:b^3=c^3:d^3$.

§. 81.

Wenn a, b, c, d, e u. s. w. in einer geometrischen Progreßion fortgehen, so ist $a^2:b^2=a:c$; $a^3:b^3=a:d$; $a^4:b^4=a:e$ u. s. w.

Denn $a:b=b:c$ | $a^2:b^2=a:c$
$a:b=a:b$ | $a:b=c:d$

$a^2:b^2=ab:bc=a:c$ | $a^3:b^3=ac:dc=a:d$

§. 82.

Wenn $a:b=c:d$, so wird $ac:bd$ das verdoppelte Verhältniß (duplicata) des einfachen $a:b$ oder $c:d$ genannt. Eben so, wenn $a:b=c:d=e:f$ so ist $ace:bdf$ das verdreyfältigte Verhältniß $a:b$ (triplicata.) Zwey oder mehr ungleiche Verhältnisse $a:b$; $g:h$ zusammengenommen, machen überhaupt ein zusammengesetztes Verhältniß $ag:bh$ aus. (composita.)

§. 83.

Wenn vier Grössen in arithmetischer Proportion sind, $a-b=c-d$, so ist die Summe der äussern Glieder der Summe der mittleren gleich, oder $a+d=b+c$.

Da das erste Glied das zweyte um eben so viel übertrift, als das dritte das vierte, so nenne man

man diesen Ueberschuß e, so ist $a=b+e$ und $c=d+e$. Und da $a-b=c-d$, so ist $b+e-b=d+e-d$, oder $e=e$.

§. 84.

Hieraus folget, daß wenn $\div a, b, c$, so ist $a+c=2b$, mithin $b=\frac{a+c}{2}$; wenn $a-b=c-x$, so ist $b+c=a+x$, und $x=b+c-a$.

§. 85.

Wenn man in einer arithmetischen Progreßion das erste Glied $=a$, und die Differenz der Glieder $=d$ setzet, so wird eine arithmetische Progreßion allgemein durch folgende Reihe (§. 63.) ausgedrucket:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d} \overset{\ldots n}{\ldots\ldots a+(n-1)d}$$

Wenn $a=1$, $d=2$, so ist die Progreßion 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. Setzt man $a=48$, und $d=-4$, so ist die Progreßion 48, 44, 40, 36, 32, 28, 24, 20 u. s. w. Wenn $a=12$, und $d=-3$, so wäre die Progreßion 12, 9, 6, 3, 0, 3 -6, -9, u. s. w.

§. 86.

Es ist hieraus klar, daß die Summe der beyden äussersten Glieder gleich ist der Summe zweyer mittleren, die von den äussern gleich weit abstehen, oder dem doppelten mittleren Gliede, wenn die Anzahl der Glieder ungrade ist. Hieraus fol-

get weiter, daß die Summe aller Glieder der Progreßion gleich iſt der Summe der beyden äuſſern Glieder multiplicirt mit der halben Anzahl aller Glieder. Das letzte Glied iſt gleich der Summe des erſten Gliedes und des Products aus der Differenz Glieder mit der um 1 verminderten Anzahl der Glieder multiplicirt.

Wenn alſo die Anzahl der Glieder $= n$, das letzte Glied $= b$, und die Summe der Progreßion $= s$, ſo iſt $s = \frac{1}{2} n (2a + (n-1)d)$; $b = a + (n-1)d$.

§. 87.

Aus dem erſten Gliede $= a$, dem letzten Gliede $= b$ und der Differenz der Glieder $= d$ in einer arithmethiſchen Progreßion, die Anzahl der Glieder $= x$, und die Summe der Progreßion $= y$ zu finden?

Hier iſt $b = a + (x-1)d$ und $y = \frac{1}{2}x(2a + (x-1)d)$

$b = a + dx - d$ u. alſo $x = \frac{b + d - a}{d}$

Wenn $a = 1$, $d = 2$, $b = 25$, ſo iſt $x = \frac{27-1}{2} = 13$ und $y = \frac{13}{2}(2 + 12 + 2) = \frac{13 + 26}{2} = 13 + 13 = 169$.

Folglich iſt die Progreßion ſelbſt

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=169$.

§. 88.

Wenn man in einer geometriſchen Progreßion das erſte Glied $= a$, und den Namen des Verhält-

hältnisses = m setzet, so ist die Progreßion selbst allgemein ausgedrückt

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots\ldots & n \\ a, & ma, & m^2a, & m^3a, & m^4a, \ldots\ldots & m^{n-1}a \end{matrix}$$

Wenn $a=1$, $m=2$, so ist die Progreßion 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, u. s. w. Wenn $a=1$, $m=\frac{1}{2}$ so ist die Progreßion 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w.

§. 89.

In einer geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äussern Glieder gleich dem Product zweyer Zwischenglieder, die von den äussern gleich weit entfernt sind, und dem Quadrat des mittelsten Gliedes, wenn die Anzahl der Glieder ungrade ist. Das letzte Glied ist gleich dem ersten Gliede multipliciret mit dem Namen des Verhältnisses erhöhet zu einer Potenz, deren Exponent die um 1 verminderte Anzahl der Glieder ist. Wenn also das erste Glied $=a$, der Name des Verhältnisses $=m$, die Anzahl der Glieder $=n$, und das letzte Glied $=b$, so ist $b=am^{n-1}$.

§. 90.

Wenn man in einer geometrischen Progreßion das kleinste Glied von dem größten abziehet, und den Rest mit dem um 1 verminderten Namen des Verhältnisses dividiret, so ist der Quotient die Summe aller Glieder, weniger dem größten. Wenn z. B. das kleinste Glied $=a$, das größte $=m^5a$, so ist $\frac{m^5a-a}{m-1}=m^4a+m^3a+m^2a+ma+a$.

 §. 91.

§. 91.

Also ist die Summe einer geometrischen Progreßion (§. 89. 90.) $= S = \frac{m^{n-1}a - a}{m-1} + m^{n-1}a = \frac{m^{n-1}a - a + m^n a - m^{n-1}a}{m-1}$ (§. 24. 19.) $= \frac{m^n a - a}{m-1}$.

§. 92.

In einer geometrischen Progreßion aus dem Namen des Verhältnisses $= m$, der Anzahl der Glieder $= n$, und der Summe der Glieder $= S$, das erste Glied $= x$, und das letzte $= y$ zu finden?

Zufolge des Ausdrucks des letzten Gliedes (§. 89.) und der Summe der Progreßion (§. 91.) ist

$$S = \frac{m^n x - x}{m-1} \text{ und } x = \frac{S(m-1)}{m^n - 1}; \; y = m^{n-1}x.$$

Wenn $m = 2$, $n = 7$, $S = 381$, so ist $x = \frac{381}{127} = 3$, und $y = 2^6 + 3 = 192$. Hieraus folgt die Progreßion $3+6+12+24+48+96+192 = 381$.

Viertes Kapitel.

Von der Entstehung der Grössen, und der Anwendung der Algebra auf die ebene Elementar-Geometrie.

§. 93.

Obgleich die Algebra eine Wissenschaft ist, welche näher mit der Arithmetik als mit der Geometrie verwandt zu seyn scheint, indem darin Berech-

Berechnungen mit Hülfe der vier arithmetischen Rechnungsarten angestellt werden, so kann sie doch mit vielem Vortheil auf die Geometrie angewandt und zur Untersuchung der Eigenschaften geometrischer Grössen gebraucht werden. Die Geometrie hat durch Hülfe der algebraischen oder analytischen Methode in kurzer Zeit einen ansehnlicheren Zuwachs erhalten, als man jemals hätte erwarten können, wenn man nur allein die synthetische gehabt hätte. Sehr viele Sätze lassen sich analytisch weit kürzer als synthetisch beweisen, wovon sich viele Beyspiele anführen liessen, wenn es nicht schon augenscheinlich aus Vergleichung des vorhergehenden Kapitels mit Euklides's Vten Buche erhelle. Nichts destoweniger aber hat die synthetische Methode, worin die Elemente des Euklides ein Meisterstück sind, ihren unentbehrlichen Nutzen, und muß desfalls nie zur Seite gesetzt werden. Viele geometrische Wahrheiten sind auch von der Beschaffenheit, daß sie sich nicht wohl algebraisch behandeln lassen. Bey dem, was ich hier vortragen werde, setze ich wenigstens die vier ersten Bücher der Elemente des Euklides als bekannt voraus.

§. 94.

Es ist bekannt, daß die Geometrie solche Grössen zum Gegenstande hat, deren Theile an einander hängen und nicht würklich von einander ge-

trennt sind, (magnitudines, quantitates continuæ). Allein dies hindert es nicht, sie, wenn die Umstände es erfordern, als solche zu betrachten, die aus einer so grossen Menge gleicher oder ungleicher Theile bestehen, als man will, sie folglich für unzusammenhängende und getheilte Grössen (quantitates discretæ) zu halten, und demnach arithmetisch oder algebraisch zu behandeln.

§. 95.

Man kann alle ausgedehnte Grössen ansehen, als wenn sie durch Bewegung hervorgebracht worden. Will man nun die so entstandenen Grössen recht kennen lernen, so muß man theils auf den bewegten Gegenstand, theils auf die Beschaffenheit der Bewegung sehen. Der bewegte Gegenstand kann entweder ein Punkt, eine Linie oder eine Fläche seyn, und die Bewegung kann auf verschiedene Art geschehen.

§. 96.

Wir können sonach nicht umhin, zuerst etwas von der Bewegung überhaupt zu sagen. Bey der Bewegung sind aber vier verschiedene Stücke: Zeit, Geschwindigkeit, Richtung und Raum zu merken, wovon ein jedes vor sich etwas näher in Untersuchung zu ziehen ist. Man stellt sich die Zeit als etwas beständig und gleichförmig Fortfliessendes vor, welches weder geschwinder noch

lang-

langsamer gehen kann, und das sich nach Belieben in gleiche oder ungleiche Theile theilen läßt.

§. 97.

Die Geschwindigkeit ist das Vermögen, Kraft welches ein in Bewegung gesetzter Gegenstand in einer gewissen Zeit einen gewissen Raum durchlaufen kann. Sie ist nicht, wie die Zeit, beständig, sondern hat Grade, welche man bald grösser, bald kleiner annehmen kann. Der Körper besitzt eine grössere Geschwindigkeit, der in gleicher Zeit einem grösseren Raum zu durchlaufen im Stande ist, als ein anderer, der in eben derselben oder in gleicher Zeit einen kleineren Weg zurücklegt. Solchem nach sind die Räume, welche in gleicher Zeit mit unveränderter Geschwindigkeit während der Bewegung durchloffen werden, das Maaß der Grade der Geschwindigkeit. Und wenn man also zweyer Körper Geschwindigkeiten mit einander vergleichen will, so stehen sie in eben dem Verhältniß, worin die unter gleicher Zeit mit ungeänderter Geschwindigkeit von beyden beschriebene Wege stehen.

§. 98.

Ein in Bewegung gesetzter Körper kann zwar auf einmal nicht mehr, als einen Grad der Geschwindigkeit besitzen; allein da dieser bald eine Veränderung leiden kann, so hat man Anlaß, die

Geschwindigkeiten in Absicht auf ihre Beschaffenheit entweder als gleichförmig, zunehmend oder abnehmend zu betrachten. Ein Körper besitzt eine **gleichförmige Geschwindigkeit**, (celeritas æquabilis) wenn er in gleich langen auf einander folgenden Zeittheilen gleich grosse Räume durchläuft. Eine **zunehmende oder wachsende Geschwindigkeit** (celeritas accelerata) nennt man diejenige, wodurch in den vorhergehenden Zeitmomenten kleinere und in den gleich langen folgenden grössere Räume beschrieben werden. Wenn aber grössere Räume in den vorhergehenden als in den folgenden Zeitmomenten zurückgelegt werden, so ist die **Geschwindigkeit abnehmend** (celeritas retardata).

§. 99.

Die Gegend, nach welcher sich ein bewegter Körper zu beweget, wird seine **Richtung** (directio) genannt. Diese kann während der ganzen Bewegung entweder beständig oder veränderlich seyn.

§. 100.

Raum (Spatium) nennt man die Länge, welche der in Bewegung gesetzte Körper durchläuft, dessen Grösse also dem Product aus der Zeit und der Geschwindigkeit proportional ist. Wenn zwey Körper sich in den Zeiten T, t, mit den Geschwindigkeiten C, c bewegen, und die Räume

S, s

S, s durchlaufen, so ist $S:s = TC:tc$; $T:t = \frac{S}{C}:\frac{s}{c}$, und $C:c = \frac{S}{T}:\frac{s}{t}$.

§. 101.

Wenn man die Beschaffenheit einer Grösse untersuchen will, die durch Bewegung hervorgebracht ist, oder, welches einerley ist, wenn man die Würkung einer Bewegung kennen lernen will, so muß man zuerst den Gegenstand betrachten, der in Bewegung gesetzt ist, und zweytens die Beschaffenheit der Bewegung. Je nachdem diese verschieden sind, so wird auch die Würkung verschieden ausfallen.

§. 102.

Ein **Punct** ist, was gar keine Theile hat. Er ist solcher Gestalt untheilbar und von keinen Gränzen eingeschlossen, sondern ist sich selbst seine Gränze.

§. 103.

Wenn ein Punkt A (Fig. 1.) sich von A nach B beweget, und während der Bewegung Spuren nach sich lässet, so entstehet eine **Linie** oder **Länge**. Diese nennt man **grade**, wenn der Punct A während der Bewegung beständig eben dieselbe Richtung behält; aber **krumm**, wenn er seine Richtung stetig ändert.

§. 104.

Wenn eine Linie AB (Fig. 2.) sich in einer andern Richtung beweget, als diejenige ist, die ihre Enden, wenn sie grade ist, anzeigen, und während dieser Bewegung Spuren hinterläßt, so entstehet eine Fläche ABCD (superficies), welche Länge und Breite hat. Man nennt selbige eben, wenn man in derselben aus einem darin angenommenen Punkt nach allen Richtungen grade Linien ziehen kann: in allen andern Fällen aber krumm.

§. 105.

Wenn eine Fläche AD (Fig. 3.) sich in einer Richtung beweget, die nicht mit ihr in einerley Ebene lieget, falls sie selbst eine ebene Fläche ist, und während ihrer Bewegung Merkmale hinter sich lässet, so entstehet ein Körper, der Länge, Breite und Höhe hat.

§. 106.

Hieraus ist klar, daß ein Körper drey Ausmessungen (Dimensionen), und zu Gränzen Flächen hat. Eine Fläche besitzt zwey Ausmessungen, und ist von Linien, als Gränzen, eingeschlossen. Eine Linie hat nur eine Ausmessung und kann Punkte zu ihren Gränzen haben. Ein Punkt hat keine Ausmessung, auch kann man sich bey demselben keine Gränzen gedenken.

§. 107.

Wenn eine grade Linie CM (Fig. 4.), die in dem Punkt C befestiget ist, sich um diesen festen Punkt in einer Ebene beweget, indem sie ihre Bewegung von CB anhebt, und so rund um den Punkt C herumgehet, bis sie wiederum mit CB zusammenfällt, so beschreibet CM einen Cirkel, der in der Peripherie eingeschlossen ist, die der Punkt M während der Bewegung erzeuget.

§. 108.

In dem Augenblick, da CM sich von CB entfernt, entstehet ein **gradlinichter Winkel** MCB; welcher ein **spitzer Winkel** genannt wird, so lange der Bogen BM kleiner ist, als der halbe Bogen BMA, der in A durch den verlängerten Radius BC abgeschnitten wird; ein **rechter**, wenn BM = BA; in welchem Falle dann MC eine **senkrechte Linie** auf AB ist; und ein **stumpfer**, wie ACM, wenn der Bogen AM grösser als MB ist.

§. 109.

Wenn eine gegebene grade Linie CA an eine ander grade Linie AB unter einem gegebenen Winkel gesetzt wird, und eine andere grade Linie PM = AC beweget sich von A längst AB, so daß der Punkt P stets in AB bleibet und der Winkel MPB stets dem Winkel A gleich ist, so beschreibet M eine Linie CD, von welcher man saget, daß sie **parallel** mit AB sey.

§. 110.

Wenn der Winkel A ein rechter ist, und AP = AC, so ist die dadurch entstehende Figur CP ein Quadrat; wenn aber AP grösser oder kleiner als AC ist, so ist CP ein Rectangel oder Rechteck. Wenn der Winkel A entweder spitz oder stumpf ist, und AP = AC, so ist CP ein Rhombus, wenn aber AP nicht gleich AC ist, so ist CP ein Rhomboides. Diese vier Figuren nennt man mit einem gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme.

§. 111.

Wenn eine grade Linie PM (Fig. 6.) auf der Art aus dem Punkt A entspringet, daß der Punkt P sich von A aus längst der graden Linie AB beweget, der Punkt M jederzeit in der graden Linie AC belegen und PM beständig parallel mit der Linie BC ist, die mit AB einen gegebenen Winkel CBA macht; so nennt man die Fläche APM, welche durch die Bewegung der PM beschrieben wird ein gradlinichtes Dreyeck.

§. 112.

Der Punkt A, in welchem man sich den Anfang der Bewegung gedenket, wird der Scheitelpunkt (Vertex); die Linie AP die Abscisse und PM die Ordinate genannt.

§. 113.

Eine beständige Linie wird algebraisch durch einen der ersten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt; und man kann also (Fig. 7.) EF=a setzen. Zur Bezeichnung der veränderlichen Linien bedienet man sich dahingegen der letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z. Wenn man EK=b, KF=c setzet, so ist EF=a=b+c, und KF=c=EF-EK=a-b.

§. 114.

Wenn man annimmt, die Grundlinie AB des Rechtecks CB sey in eine Menge gleicher Theile, deren Grösse und Anzahl willkürlich ist, eingetheilet, man habe ferner die Höhe AB in eben solche Theile getheilet, deren Menge so groß ist, als ihrer viele darauf Platz finden, und man setzet die Anzahl der Theile in AB=a, und in AC=b, so stellet das Product ab das Rechteck CB vor, welches AB und AC zur Grundlinie und senkrechten Höhe hat.

§. 115.

Wenn ein anderes Rechteck GF zur Grundlinie EF=c, und zur Höhe EG=d hat, so ist CB:GF=ab:cd, das heißt, im zusammengesetztem Verhältniß von a:c und b:d. Wenn a=c, so ist CB:GF=ab:cd=b:d, (§. 75.), (VI. 1.) gemäß.

§. 116.

Stellt man sich vor, daß das Rechteck CB (Fig. 3.) sich längst der Linie CG als seiner Richtungslinie bewege, so daß die Winkel GCD, GCA während der Bewegung stets rechte Winkel blieben, CD aber stets mit sich selbst parallel wäre, und daß das Rechteck CB sich fortbewege, bis es die Lage GF angenommen, so entstehet dadurch ein rechtwinklichtes **Parallelepipedum** ED. Setzet man CD = a, CA = b, so ist das Rechteck AD = ab (§. 114.); und setzet man ferner CG = c, so ist das Parallelepipedum ED = abc.

§. 117.

Nimmt man a = b = c an, so ist abc = a^3, und die körperliche Figur ein **Cubus**. Hieraus erhellet, wie algebraische Grössen Figuren von allen Dimensionen vorstellen können.

§. 118.

Fluent oder **Integral** ist eine Grösse, die man sich als durch Bewegung entstanden vorstellt, und die durch Fortsetzung einer Bewegung von eben der Art vermehret oder vermindert werden kann.

§. 119.

Fluxion oder **Differential** ist die Geschwindigkeit, womit eine Grösse in jedwedem Augenblick fliesset, indem sie entstehet.

§. 120.

Das Maaß einer Fluxion ist also der Zuwachs oder die Abnahme, den eine Fluente in einer gewissen Zeit erhalten würde, wenn die Bewegung von dem Augenblicke an, da sie anfängt oder fortgesetzet wird, ohne Beschleunigung oder Abnahme fortgesetzt würde.

§. 121.

Hieraus folgt, daß man nicht bey beständigen, sondern nur allein bey veränderlichen Grössen an eine Fluxion gedenken könne. Diese Fluxion bezeichnet man entweder mit einem Punkt über, oder einem d vor der veränderlichen Grösse. Z. E. $\dot{x}$ oder dx bedeutet die Fluxion von x; $\dot{y}$ oder dy die Fluxion von y.

§. 122.

Wenn der Punkt P (Fig. 8.) sich beweget und mit gleichförmiger Bewegung die Linie AP hervorbringt, so ist AP eine veränderliche und wachsende Linie. Man setzet deswegen AP = x, und bemerket die beständige Geschwindigkeit, womit sich der Punkt P beweget, durch eine gegebene Linie Pp = dx.

§. 123.

Wenn zwey Fluenten AP, BQ stets einander gleich sind, so sind ihre Fluxionen es auch, und umgekehrt.

Denn indem AP und BQ stets einander gleich sind, so müssen die Punkte P und Q jederzeit einerley Geschwindigkeit haben, wie sonst ihre Bewegung auch beschaffen seyn mag, und folglich sind ihre Fluxionen stets einander gleich (§. 119.). Ferner, wenn die Punkte P und Q allezeit einerley Geschwindigkeit haben, und in gleicher Zeit die Linien AP, BQ erzeugen, so ist AP dem BQ gleich; denn wäre die eine grösser als die andere, so müßte einerley Geschwindigkeit in gleichen Zeiten ungleiche Räume geben, welches ungereimt.

§. 124.

Hieraus folgt, daß wenn eine Fluente allezeit der Summe zweyer oder mehrerer Fluenten gleich ist, so muß die Fluxion der ersten der Summe der Fluxionen der letzten gleich seyn, und umgekehrt.

§. 125.

AM (Fig. 9.) sey ein Rechteck, dessen Höhe AB beständig und Grundlinie AP veränderlich ist. Man setze AB = a, AP = x, Pp = dx, so ist das Rechteck AM = ax die Fluente, und das Rechteck Pm = PM . Pp (§. 114.) = adx stellt die Fluxion derselben vor. (§. 119.)

§. 126.

Wenn man mit des Dreyecks ABC (Fig. 10.) einen Seite BC eine Parallellinie PM ziehet,

het, so schneidet selbige die beyden übrigen Seiten AB, AC in proportionale Theile, so daß AB : AC = AP : PM (VI. 2.).

Man nehme an, das Dreyeck ABC werde auf vorbeschriebene Art (§. 111.) durch Bewegung der Ordinate PM erzeuget, und setze, daß der Punkt P sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewege, welche durch Pp = Qq vorgestellt wird. Man ziehe PM, pm, QN, qn parallel mit BC, und Mo, Nr parallel mit AB. Da nun die Punkte P und M, Q und N die Linien Pp, Qq, Mm, Nn in gleicher Zeit beschreiben, und Pp = Qq, so ist auch Mo = Nr (I. 34.); es ist aber Mmo = Nnr = C und mMo = nNr = A (I. 29.), und also Mm = Nn. (I. 26.) Da also die gleichen Linien Mm und Nn in gleichen Zeiten beschrieben werden, wo man sie auch auf der Linie AC annimmt, so beweget sich der Punkt M gleichförmig, und Mm oder Nn ist dessen Fluxion. Man setze die Fluxion oder die Geschwindigkeit, womit M die Linie AC beschreibet = V, und die Geschwindigkeit, womit P die Linie AB beschreibet = v. Da die Zeiten gleich sind, so ist AC : AB = V : v, (§. 97.) und aus eben dem Grunde AM : AP = V : v, derowegen ist AB : AC = AP : AM.

§. 127.

In gleichwinklichten Dreyecken CAB, RST (Fig. 10. 11.) sind die Seiten proportio-

nal, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, und umgekehrt. (VI. 4. 5.)

Fällt S auf A, ST auf AB, so muß auch SR auf AC fallen, und da R = C, so ist RT in dieser Stellung parallel mit CB, und also CA : AB = RT : ST. Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß CA : BA = RT : TS, wenn man annimmt, daß das Dreyeck RTS in den Winkel B gesetzt werde.

Man nehme AM = SR und ziehe MP parallel mit CB; da nun AC : AB = AM : AP (§. 126.) = RS : ST, und AM = SR, so ist AP = ST. Aus eben dem Grunde ist MP = RT, folglich sind die Winkel des Dreyecks AMP den Winkeln des Dreyecks SRT gleich. Es ist aber △ AMP gleichwinklicht mit dem Dreyecke ACB, und also sind die Dreyecke CAB, RST gleichwinklicht.

§. 128.

Wenn man eine grade Linie AB (Fig 12.) in C in zwey gleiche und in D in zwey ungleiche Theile theilet, so ist $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$ (II. 5.).

Es sey AC = CB = a, CD = x, so ist AD = a + x, DB = a - x, $AD \cdot DB = a^2 - x^2$, $CD^2 = x^2$, solcher gestalt hat man $AD \cdot DB + CD^2 = a^2 - x^2 + x^2 = a^2 = CB^2$.

§. 129.

Wenn eine grade Linie AB (Fig. 13.) in C in zwey gleiche Theile getheilet, und eine

andere

andere grade Linie BD ihr in grader Linie zugesetzet wird, so ist $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$. (II. 6.)

Es sey $AC = CB = a$, $CD = x$, so ist $AD = a + x$ und $BD = x - a$, $AD \cdot DB = x^2 - a^2$, $CB^2 = a^2$, woraus folget $AD \cdot DB + CB^2 = x^2 - a^2 + a^2 = x^2 = CD^2$.

§. 130.

Wenn eine grade Linie AB (Fig. 12. 13.) in C in zwey gleiche Theile getheilet und in der Linie CB oder ihrer Verlängerung der Punkt D angenommen wird, so ist $AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$ (II. 9. 10.)

Es sey $AC = CB = a$, $CD = x$, so ist in beyden Fällen $AD = a + x$, $DB = a - x$, und folglich $AD^2 = a^2 + 2ax + x^2$, $DB^2 = a^2 - 2ax + x^2$ (§. 18.) woraus $AD^2 + DB^2 = 2a^2 + 2x^2 = 2AC^2 + 2CD^2$ folgt.

§. 131.

In dem rechtwinklichten Dreyecke ACB (Fig. 14.) ist das Quadrat der Seite AB, welche dem rechten Winkel ACB gegenüber stehet, so groß, als die beyden Quadrate der übrigen Seiten CA, CB, welche den rechten Winkel einschliessen. Das heißt, es ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$. (I. 47.)

Man ziehe CD senkrecht auf AB. Da $ACB = ADC$, und CAD beyden Dreyecken ACB und ACD

gemeinschaftlich ist, so sind die Winkel B und ACD einander gleich, die Dreyecke ACB und ACD gleichwinklichte, und folglich die den gleichen Winkeln gegenüberstehende Seiten proportionale. (§. 127.) Aus ähnlichen Gründen ist das Dreyeck CDB dem Dreyecke ACB ähnlich. Man setze $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, $AD=m$, so ist $DB=a-m$. Da nun $AB:AC=AC:AD$, das ist $a:b=b:m$, und $AB:BC=BC:BD$ oder $a:c=c:a-m$, so ist (§. 65.) $am=b^2$ und $a^2-am=c^2$; $am+a^2-am=b^2+c^2$; $a^2=b^2+c^2$ oder $AB^2=AC^2+CB^2$.

§. 132.

Das Quadrat der Seite AB, (Fig. 15.) welche in einem Dreyecke dem stumpfen Winkel ACB gegenüber stehet, ist gleich der Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten AC, CB und des doppelten Rechteckes aus der Seite CB, auf welche verlängert ein Perpendikel AD aus dem gegenüber stehenden Winkel gefällt wird, und aus dem Stück der Grundlinie DC, welches zwischen dem stumpfen Winkel und der Perpendicularlinie lieget. Das ist $AB^2=AC^2+AB^2+2BC.CD$. (II. 12.)

Es sey $AB=a$, $AC=b$, $CB=c$, $AD=h$, $DC=m$, so ist $AB^2=AD^2+DB^2$ oder $a^2=h^2+c^2+2cm+m^2$. Es ist aber $AC^2=AD^2+DC^2$ oder $b^2=h^2+m^2$, und

und derowegen $a^2 = c^2 + b^2 + 2cm$ oder $AB^2 = AC^2 + AB + 2BC.CD$.

§. 133.

Hieraus folget, daß man die Perpendicularlinie in einem Dreyeck finden kann, wenn alle drey Seiten gegeben sind. Denn aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ erhält man $m = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$, und aus $b^2 = h^2 + m^2$ ist $h^2 = b^2 - m^2$, folglich $h = \sqrt{b^2 - m^2}$.

§. 134.

Das Quadrat der Seite AB (Fig. 16.) welches in einem Dreyecke dem spitzen Winkel C gegenüber stehet, ist gleich der Differenz zwischen den Quadraten der beyden übrigen Seiten AC, BC, und dem Rechteck aus der doppelten Grundlinie CB und dem Theil derselben, welcher zwischen dem spitzen Winkel C und dem Perpendikel AD lieget. Das ist $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC.CD$ (II. 13.).

Behält man die vorige Benennung bey, so ist $AB^2 = AD^2 + DB$ oder $a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2$. Es ist aber $AC^2 = AD^2 + CD^2$ oder $b^2 = h^2 + m^2$, derowegen ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$, das ist $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC.CD$.

§. 135.

Hier ist $CD = m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, welcher Werth von m für die Grösse selbst in die Gleichung

 $b^2 =$

$b^2 = h^2 + m^2$ gesetzt, den Perpendikel $h = \sqrt{b^2 - m^2}$ gibt.

§. 136.

Die Fluxion der Fläche eines Dreyecks wird durch ein Rechteck ausgedrückt, dessen Höhe die Ordinate und dessen Grundlinie die Fluxion der Abscisse ist.

1 Fall. Es sey zuerst ein bey B rechtwinklichtes Dreyeck ACB (Fig. 17.), welches durch PM erzeugt wird; CP sey die Abscisse desselben, PM die Ordinate und Pp werde für die Fluxion der Abscisse angenommen. Während der Zeit, daß der Punkt P die Pp mit gleichförmiger Bewegung beschreibt, erzeugt der Punkt M die Linie Mm gleichfalls mit gleichförmiger Bewegung; und dadurch erhält das Dreyeck MCP einen Zuwachs, der durch das Trapezium MmpP vorgestellt wird. Allein dieser Zuwachs des Dreyecks entsteht durch zunehmende Geschwindigkeit. (§. 98.) Denn wenn man $p\pi = Pp$ nimmt, und $\pi\mu$ parallel mit PM ziehet, so werden zwar Pp, $p\pi$, Mm, $m\mu$ in gleichen Zeiten beschrieben, aber der Zuwachs, den das Dreyeck CMP erhält, indem Pp beschrieben wird, nemlich das Trapezium MmpP, ist kleiner als der Zuwachs $m\mu\pi p$, den das Dreyeck mCp in eben der Zeit erhält; denn MmpP=Mp+Mmo, und $m\mu\pi p = o\pi + m\mu no = Mp + 3Mmo$. Demnach ist 4Mmo eine Würkung der Beschleunigung, mit welcher des Dreyecks MCP Fläche

wächst,

wächst, indem P die Pπ beschreibet, und gehöret solcher Gestalt nicht zu dem Maaß ihrer Fluxion (§. 120.). Wenn also die Geschwindigkeit, womit die Ordinate PM die Fläche des Dreyecks MCP vermehret, ohne Beschleunigung fortginge, während der Zeit, daß Pp beschrieben wird, so entstünde nur das Rechteck Mp, welches demnach die Fluxion der Fläche MCP vorstellt.

2 Fall. In dem rechtwinklichten Dreyeck ADC (Fig. 18.) sey CQ die Abscisse, und Qq die Fluxion derselben. Man setze, das Dreyeck ACB werde von seiner Ordinate PM so erzeuget, daß MPQ senkrecht auf CD ist und der Punkt P sich stets in der graden Linie CB befindet. Nun ist dem ersten Falle zufolge die Fluxion des Dreyecks $MCQ = QM . Qq$, und des Dreyecks $PCQ = QP . Qq$. Da aber während der Erzeugung stets $\triangle MCP = \triangle MCQ - \triangle PCQ$; so ist auch des Dreyecks MCP Fluxion $= QM . Qq - QP . Qq$ (§. 124.) $= (QM - OP)\, Qq = PM . Qq$.

Setzt man also in beyden Fällen die Abscisse $= x$, ihre Fluxion $= dx$, die Ordinate $PM = y$, so ist im ersten Falle die Fluxion des Dreyecks $MCP = ydx$; und im zweyten Falle die Fluxion des Dreyecks $MCP = ydx$.

§. 137.

Wenn der Punkt M, anstatt die grade Linie CA zu folgen, die krumme Linie AMN oder CMR

(Fig. 19.) beschreiben sollte, welche sich alle drey in M durchschneiden, so sind die Fluxionen in M für alle drey Flächen CMN, CMA, CMR dieselbigen, nemlich gleich dem Rechtecke auf PM und der Fluxion der Abscisse CP.

§. 138.

Die Parallellogramme AF, ED, (Fig. 20.) welche auf einerley Grundlinie EF und zwischen einerley Parallellinien AD, EF stehen, sind einander gleich. (I. 35.)

Man nehme AP zur gemeinschaftlichen Abscisse der Parallellogramme an, und ziehe zu AD die Parallellinie PMQN, von welcher das Stück PM die Ordinate im Rechteck AD, und QN die Ordinate in dem Parallellogramme ED ist. Diese Ordinaten erzeugen beyde Parallellogramme in der Zeit, in welcher P sich gleichförmig längst AE mit einer Geschwindigkeit beweget, welche Pp vorstellt. Nun ist EF = PM, und EF = QN (I. 34.), deswegen auch stets PM = QN, und PM . Pp = QN . Pp, folglich AM = CN. (§. 123.) Wenn P in E kommt, so fallen PM und QN mit EF zusammen, und also ist dann AF = ED.

§. 139.

Die Dreyecke ABC, ECF, (Fig. 21.) welche auf gleichen Grundlinien BC, CF, zwischen einerley Parallellinien AE, BF stehen, sind einander gleich.

Man ziehe AD senkrecht auf BF, und nehme AP für die gemeinschaftliche Abscisse an. Durch P ziehe man eine Parallellinie mit BF, auf welcher MN und QR die Ordinaten der Dreyecke ABC und ECF vorstellen. Indem $AP:AD = AN:AC$, (§. 126.) $= EQ:EC = QR:CF$ und $AP:AD = PN:DC$, (§. 127.) $= PM:DB = PN + PM : DC + DB$ (§. 72.) $= MN:BC$ so ist $MN:BC = QR:CF$ (§. 73.) und $\frac{MN}{BC} : \frac{QR}{CF}$ (§. 57.) Es ist aber nach der Voraussetzung $BC = CF$, derowegen ist $MN = QR$, und $MN . Pp = QR . Pp$. Solcher gestalt ist die Fläche AMN allezeit der Fläche EQR gleich (§. 123.), und also das Dreyeck ABC gleich dem Dreyecke ECF.

§. 140.

Die Fluxion eines Rechtecks QP (Fig. 22.), woran die beyden einen Winkel einschliessende Seiten AP, AQ veränderlich sind, wird durch zwey Rechtecke vorgestellt, deren jedes von einer der Seiten und der Fluxion der andern Seite eingeschlossen ist.

Man nehme an, das Rechteck QP entstehe durch Bewegung der Ordinaten PM, QM von A aus, so daß M allezeit in einer graden Linie AM fortgeht, welche die Diagonale des Rechteckes ist. Man setze $AP = x$, $Pp = dx$, $AQ = y$, $Qq = dy$, so ist die Fluxion des Dreyeckes $MAQ = xdy$, und die Fluxion des Dreyecks $MAP = ydx$, und

und folglich (§. 124.) die Fluxion des Parallelogramms QP oder die Fluxion von $xy = xdy + ydx$.

§. 141.

Indem Pp und Qq in gleichen Zeiten und mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben werden, erhält das Parallelogramm QP einen Zuwachs, der den Geomon MQqmpPM gleich ist. Allein das dazu gehörige Rechteck no ist eine Würkung der Beschleunigung, womit QP wächset, und gehöret solcher gestalt nicht zu dessen Fluxion, wie aus der Erinnerung (§. 136.) erhellt.

§. 142.

Wenn $AP = AQ$, so ist QP ein Quadrat, und also $x = y$; $dx = dy$, und $xdy + ydx = xdx + xdx = 2xdx$, $xy = x^2$. Demnach erhält man die Fluxion $2xdx$ eines Quadrats x^2, wenn man die Wurzel mit dem Exponenten und mit der Fluxion der Wurzel multipliciret.

§. 143.

Um die Fluxion eines rechtwinklichten Parallelepipedums xyz, woran alle Seiten veränderlich sind, zu finden, sehe man es an als ein Product $xy \cdot z$, so ist (§. 140.) $d(xyz) = xydz + z \cdot d(xy)$; es ist aber $d(xy) = xdy + ydx$, derowegen ist $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$. Setzet man nun $x = y = z$, so ist $xyz = x^3$ ein Würfel, und dessen Fluxion also $= 3x^2dx$. Diese erhält man, indem

man

man den Exponenten des Würfels um eine Einheit vermindert, diese so um eine Dimension erniedrigte Potenz mit dem Exponenten des Würfels und weiter mit der Fluxion der Wurzel multiplicirt.

Ueberhaupt ist $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

§. 144.

Die Fluente einer Fluxion bezeichnet man dadurch, daß man ∫ vor der Fluxion setzet. Aus dem vorhergehenden erhellt nun, daß

$d(x) = dx$. und $\int dx = x$ (§. 121.)
$d(x \pm y) = dx \pm dy$. und $\int(dx \pm dy) = x \pm y$. (§. 124.)
$d(xy) = xdy \pm ydx$. und $\int(xdy + ydx) = xy$ (§. 140.)
$d(x^2) = 2xdx$. und $\int(2xdx) = x^2$ (§. 142.)
$d(x^3) = 3x^2dx$ und $\int(3xdx) = x^3$ (§. 143.)
$d(x^m) = mx^{m-1}dx$ und $\int(mx^{m-1}dx) = x^m$.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dx = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2} \text{ und } \int \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{x}{y}.$$

§. 145.

Den Flächeninhalt eines Dreyecks ACB (Fig. 23.) zu finden.

Man setze die Grundlinie desselben CB = a, die Perpendikularlinie AB = b, die Absciſſe CP = x, Pp = dx PM = y. Da nun PM parallel mit AB ist, so hat man CP : PM = CB : BA (§. 127.)

od-

oder $x:y=a:b$, woraus $bx=ay$ (§. 65.) und $y=\frac{bx}{a}$ gefunden wird, welche Gleichung allemal den Werth von PM ausdrückt, man mag den Punkt P auf CB annehmen wo man will. Die Fluxion der Fläche MCP ist $PM \cdot Pp = ydx = \frac{bxdx}{a}$, und ihre Fluente (§. 144.) $=\frac{bx^2}{2a}$. Nimmt man nun $CP=CB$ oder $x=a$ an, so stellt die Fluente MCP die Fläche des ganzen Dreyecks ACB vor, und diese ist sonach $\frac{bx^2}{2a}=\frac{ba^2}{2a}=\frac{1}{2}ab$. Das heißt: **Die Fläche eines Dreyecks wird vorgestellt durch das halbe Product der Grundlinie multiplicirt mit der senkrechten Höhe des Dreyecks.**

§. 146.

Da ein Rechteck, welches a zur Grundlinie und b zur Höhe hat, durch ab (§. 114.) ausgedruckt wird, und $ab:\frac{1}{2}ab=2:1$, so ist das Rechteck oder überhaupt jedes Parallellogramm (§. 133.) doppelt so groß, als ein Dreyeck, welches mit demselben gleiche Grundlinie und Höhe hat. (I. 41.)

§. 147.

Aehnliche gradlinichte Figuren sind solche, worin die Winkel der einen den Winkeln der andern der Ordnung nach gleich sind, und die Seiten, die die gleichen Winkel einschliessen, proportional sind. Die Seiten, welche in beyden Figuren

guren einander entsprechen, werden gleichnamichte, (homologe) genannt.

§. 148.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer gleichnamichten Seiten. (VI. 19.)

Wenn △ ABC ∽ △ EFG (Fig. 24.), so ist △ ABC : △ EFG = $BC^2 : FG^2$. Man ziehe die Perpendikularlinien AD, EH, so ist AB : AD = EF : EH und AB : EF = AD : EH; es ist aber AB : EF = BC : FG, derowegen AD : EH = BC : FG. Man setze BC = a, AD = b, FG = c, EH = d, so ist b : d = a : c und bc = ad, △ ABC = $\frac{1}{2}$ ab und △ EFG = $\frac{1}{2}$ cd (§. 145.). Gesetzt es wäre △ ABC : △ EFG = $BC^2 : FG^2$, so wäre $\frac{1}{2} ab : \frac{1}{2} cd (= ab : cd) = a^2 : c^2$, und $abc^2 = a^2cd$; man setze für bc den gefundenen Werth ad, so wird $a^2cd = a^2cd$, und da hieran niemand zweifeln kann, so muß auch △ ABC : △ EFG = $BC^2 : FG^2$ seyn.

§. 149.

Die Parallellogramme CB, GF (Fig. 25.), deren Höhen CD, GH sich verkehrt, wie ihre Grundlinien EF, AB verhalten, sind einander gleich.

Man setze AB = a, CD = b, EF = c, GH = d. Da nun der Voraussetzung zufolge AB : EF = GH :

GH : CD, so ist $a:c=d:b$ und $ab=cd$ oder $AB.CD=EF.GH$, $CB=GF$.

§. 150.

Auf eben diese Art lässet sich erweisen, daß Dreyecke einander gleich sind, deren Grundlinien sich verkehrt, wie ihre Höhen verhalten.

§. 151.

Wenn man in einem halben Zirkel AMB (Fig. 26.) die Linie MP senkrecht auf den Diameter ziehet, so ist $PM^2=AP.PB$.

Es sey *C* der Mittelpunkt des Cirkels, und man ziehe den Radius CM. Da nun AB in *C* in zwey gleiche und in P in zwey ungleiche Theile getheilet ist, so ist $AP.PB+PC^2=AC^2$ (§. 128.) $=CM^2=CP^2+PM^2$ (§. 131.) und also $AP.PB=PM^2$.

§. 152.

Man setze den Durchmesser $AB=a$, die Abscisse $AP=x$, die Ordinate $PM=y$, so ist $BP=a-x$, und $AP.PB=PM^2=y^2=ax-x^2$; weswegen die Gleichung $y^2+x^2-ax=0$ die Natur des Cirkels ausdrücket, wenn man den Anfang der Abscissen vom Scheitelpunkt oder von dem Punkt, wo der Durchmesser die Peripherie berühret, anrechnet.

Eben so, wenn man den Radius $AC=CB=a$, $CP=x$, und $PM=y$ setzet, so ist $CM^2=PM^2+CP^2$

oder

oder $a^2 = y^2 + x^2$; $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, eine Gleichung, welche gleichfalls die Natur des Cirkels ausdrücket, wenn die Abscissen vom Mittelpunkt angerechnet werden.

§. 153.

Es sey TM eine Tangente des Cirkels in M, welche den Durchmesser in T durchschneidet. Da nun der Winkel TMC ein rechter (III. 16.) und $= MPC$ ist, so ist $\triangle TMC \backsim \triangle MPC$, und folglich $PC : CM = CM : CT$ oder $\div\!\!\div CP, CA, CT$.

§. 154.

Aus einem gegebenen Punkte T ausserhalb dem Cirkel kann man eine Tangente an den Cirkel ziehen, wenn man über TC als Durchmesser einen Cirkel beschreibet, und aus T eine Linie in den Punkt ziehet, in welchem die Peripherie dieses Cirkels die Peripherie AMB durchschneidet.

§. 155.

Wenn zwey grade Linien AC und EC (Fig. 27.) wovon die eine die Peripherie eines Cirkels in A und B, die andere in D und E schneidet, einander in C durchschneiden, so ist $AC \cdot CB = DC \cdot CE$ (III. 35. 36.).

Indem $BAC = BDC$ und $DEA = DBC$, auch $BCD = ACE$, so ist $\triangle BCD \backsim \triangle ACE$ und $AC : CE = CD : CB$ (§. 127.) folglich $AC \cdot CB = DC \cdot CE$.

§. 156.

Wenn der Punkt C ausserhalb dem Cirkel liegt, so kan AC dergestalt gezogen werden, daß sie den Cirkel in T berühret. In diesem Falle wird sodann AC = BC = TC, und $AC.CB = CT^2$, folglich $CT^2 = EC.CD$ (III. 36.).

§. 157.

Der Cirkel ist einem Dreyecke gleich, dessen Höhe mit dem Radius und dessen Grundlinie mit der Peripherie des Cirkels gleich groß ist.

Man nehme die Höhe des Dreyecks DB = Radius CA (Fig. 28.), und die Grundlinie BE = der Peripherie AMFA, so ist der Cirkel AMFA = △ DBE.

Man setze die Punkte M und N fangen zugleich an, sich mit gleichförmiger und einerley Geschwindigkeit von A und B aus zu bewegen, der erste, um die Peripherie AMFA und der zweyte, um die grade Linie BE zu beschreiben, so müssen diese beyde Längen nothwendig gleich werden. (§. 100.) Die Fluxionen oder ihre Maasse Mm, Nn sind auch gleich groß, man mag die Punkte M und N annehmen, wo man will. Den gleich grossen Bögen Mm, auf der Peripherie genommen, entsprechen aber gleiche Ausschnitte mit MCm (VI. 33.); und den gleichen Grundlinien Nn, auf BE genommen, entsprechen gleiche Drey-

ecke

ecke mit NDn, deren Spitze in D befindlich; also ist der Ausschnitt MCm die Fluxion der Fläche ACM, und △ NDn die Fluxion vom △ BDN. Da nun diese Fluxionen durchgehends gleich sind, so sind die Fluenten es auch (§. 123.), das ist, der Ausschnitt ACM = △ BDN. Wenn aber CM den Cirkel AMF beschrieben hat, so hat DN das Dreyeck BDE beschrieben; also ist der Cirkel AMFA dem Dreyeck BDE gleich (§. 123.).

§. 158.

Man setze den Radius AC = BD = r, die Peripherie AMF = BE = p, so ist der Inhalt des Cirkels = $\frac{1}{2}$rp (§. 145.).

§. 159.

Wenn man die Peripherie eines Cirkels in den Punkten A, B, E, F, G (Fig. 29.) in fünf oder mehr gleiche Theile theilet, und zwischen jedem Paar Punkte eine Sehne ziehet, so wird die in den Cirkel eingeschriebene Figur ein reguläres Vieleck, worin alle Seiten (III. 29.) und alle Winkel (III. 27.) einander gleich sind. Ziehet man aus dem Mittelpunkte C in alle Winkel Radien, so wird das Vieleck in so viele gleich grosse und ähnliche Dreyecke getheilt, als es Seiten hat. Die senkrechte Linie, die aus dem Mittelpunkte C auf eine der Seiten des Vielecks AB gefällt wird, nennt man das Apotem.

§. 160.

Man setze die Seite des Vielecks $AB = a$, das Apotem $CD = b$, so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab$. Wenn demnach die Anzahl der Seiten $= n$, so ist der Inhalt des ganzen Vielecks $= \frac{1}{2}nab$. Man sehe nun na als die Grundlinie und b als die Höhe eines Dreyecks an, so folgt: **daß jedes reguläres Vieleck einem Dreyecke gleich ist, dessen Grundlinie der Summe der Seiten des Vielecks und dessen Höhe dem Apotem gleich ist.**

§. 161.

In zweyen ähnlichen regulären Vielecken AEG, ILN (Fig. 29 30.) verhalten sich die Radien AC, IO zu einander, wie die Perimeter ABEFGA, IKLMNI.

Man setze die Seite $AB = a$, die Seite $IK = b$, den Radius $AC = c$, den Radius $IO = d$, die Anzahl der Seiten $= n$, so ist der Perimeter oder die Summe aller Seiten in dem zuerst genannten Polygone $= na$, und in dem zweyten $= nb$. Da nun $\triangle ACB \backsim \triangle IOK$, so ist $AC : AB = IO : IK$ oder $c : a = d : b$ und $c : d = a : b = na : nb$.

§. 162.

Die Flächen-Inhalte zweyer ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Radien.

Man setze AC = c, IO = d, die Anzahl der Seiten = n, so ist das Vieleck AEG = n . △ ACB und das Vieleck ILN = n . IOK. Da nun △ ACB ∽ △ IOK, so ist △ ACB : △ IOK = $c^2 : d^2$ (§. 148.). Es ist aber △ ACB : △ IOK = n . △ ACB : n . △ IOK (§. 75.). Derowegen ist $c^2 : d^2$ = n . △ ACB : n . △ IOK, oder $AC^2 : IO^2$ = Vieleck AEG : Vieleck ILN.

§. 163.

Wenn zwey Grössen sich einander unaufhörlich nähern, so daß ihr Unterschied zuletzt kleiner als jede angebliche Grösse wird, so sind sie zuletzt einander gleich.

Denn wären sie es nicht, so müßte zuletzt noch zwischen ihnen eine Differenz statt finden, welche = D seyn mag. Auf diese Art können sie sich einander nicht mehr nähern, als daß der Unterschied zwischen ihnen eine gegebene Grösse D sey; da dies aber wider die Bedingung ist, so ist es ungereimt.

§. 164.

Der Cirkel ist einem in den Cirkel geschriebenem regulärem Vielecke gleich, dessen Anzahl der Seiten unendlich ist.

Beschreibt man ein reguläres Vieleck in einem Cirkel z. E. ein Fünfeck ABEFG, (Fig. 29.) so ist selbiges kleiner, als der Cirkel. Theilt man die Cirkelbögen AG, GF, FE, u. s. w. welche die Sei-

ten des Vielecks abschneiden, in zwey gleiche Theile, und ziehet die Chorden AH, HG u. s. w. so entstehet ein reguläres Vieleck, welches doppelt so viele Seiten hat, als das vorhergehende. Theilet man weiter die Bögen, AH, HG u. s. w., welche die Seiten des zweyten Vielecks abschneiden, in zwey gleiche Theile, so entstehet das dritte Vieleck, und wenn man diese Theilung fortsetzet, das vierte, fünfte u. s. w. Durch diese fortgesetzte Theilung der Bögen und Ziehung der Sehnen, entstehet nun zuletzt ein Vieleck, welches so sehr mit dem Cirkel zusammenfällt, daß der Unterschied kleiner, als jede gegebene Grösse wird: denn diese Vielecke nähern sich der Fläche des Cirkels desto mehr, je mehr die Anzahl ihrer Seiten zunimmt. Demnach ist die Fläche des letzten Polygons in dieser Reihe von Vielecken, dessen Anzahl der Seiten unendlich ist, der Fläche des Cirkels gleich. (§. 163.)

§. 165.

Wenn die Anzahl der Seiten in einem Vieleck unendlich ist, so ist das Apotem CD gleich dem Radius des umschriebenen Cirkels. Hieraus folgt (§. 160.), daß der Flächen-Inhalt eines Cirkels einem Dreyecke gleich ist, dessen Höhe dem Radius und dessen Grundlinie der Peripherie des Cirkels gleich ist, so wie solches bereits zuvor (§. 157.) auf eine andere Art bewiesen worden.

§. 166.

Die Peripherien zweyer Cirkel verhalten sich zu einander, wie die Radien; und ihre Flächen, wie die Quadrate der Radien. (XII. 2.)

Denn man kann die Cirkel ansehen, wie ähnliche reguläre Vielecke, deren Anzahl der Seiten unendlich ist. Da es nun ohne Rücksicht auf die Anzahl der Seiten bewiesen ist, daß ihrer umschriebener Cirkeln Radien sich wie die Perimeter verhalten (§. 161.), so folgt, daß die Radien der Cirkel sich zu einander verhalten, wie die Peripherien; wie auch (§. 162.), daß die Flächen-Inhalte der Cirkel sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Radien.

§. 167.

Da die Durchmesser der Cirkel sich wie ihre Radien verhalten, so kann man in den vorhergehenden Proportionen den Durchmesser statt des Radius setzen. Sind also die Durchmesser zweyer Cirkel D, d, die Peripherien P, p, und die Flächen-Inhalte A^2, a^2, so ist $A^2 = \frac{1}{4} DP$, $a^2 = \frac{1}{4} dp$, $D:d = P:p$, oder $D:P = d:p$ (§. 69.) und eben so $D^2 : d^2 = A^2 : a^2$ oder $D^2 : A^2 = d^2 : a^2 = \frac{1}{4} DP : \frac{1}{4} dp = DP : dp$.

§. 168.

Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie oder D : P ist nicht, wie eine Zahl zu einer andern, und also kann es nicht in Zahlen ausgedruckt

druckt werden. Archimedes hat bewiesen, daß $D:P < 1:3\frac{1}{7}$ und daß $D:P > 1:3\frac{10}{71}$, woraus folget, daß $D:P = 7:22$ beynahe; etwas genauer ist $D:P = 1:3,14159$. Das Verhältniß des Quadrats des Diameters zur Fläche des Cirkels oder $D^2:\frac{1}{4}DP$ ist beynahe in Zahlen $= 7.7:\frac{1}{4}.7.22 = 14:11$, noch genauer aber wie $1000:785$.

§. 169.

Man sagt, eine **Linie** sey nach der **äussern und mittlern Verhältniß** (media et extrema ratione) getheilt, wenn die ganze Linie sich zu dem grössern Stücke verhält, wie das grössere Stück zu dem kleineren, oder wenn das Rechteck aus der ganzen Linie und dem kleineren abgeschnittenen Stücke dem Quadrate des grösseren Stücks gleich ist. (§. 65.)

§. 170.

Eine gegebene grade Linie AB (Fig. 31.) nach der äussern und mittlern Verhältniß zu theilen. (II. 11.)

Man setze $AB = a$, das grössere Stück $AF = x$, so ist das kleinere $FB = a - x$; da nun $AF^2 = AB.BF$ seyn soll, (§. 169.) so ist $x^2 = -ax + a^2$ und $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$ (§. 36.) $- = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

Konstruction. Man ziehe BD senkrecht auf AB, setze $BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, hänge die Punkte A und D durch AD zusammen, so ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$ (§. 131.)

(§. 131.) $= a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$ und $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Aus dem Punkte D beschreibe man den Bogen BE, welcher die Linie AD in E durchschneidet, so ist $AE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$; macht man nun $AF = AE$, so ist $AF^2 = AB.BF$.

§. 171.

Wenn man in einem gleichschenklichtem Dreyeck ABC (Fig. 32), worin jeder der beyden Winkel an der Grundlinie AC doppelt so groß ist, als der Winkel B in der Spitze, die Linie DC ziehet, welche den Winkel an der Grundlinie BCA halbiret, so schneidet selbige die gegenüberstehende Seite AB in D nach der äussern und mittlern Verhältniß, so daß also AB : BD = BD : DA.

Denn $BCA = 2B$, und $\frac{1}{2}BCA = B = DCA$, der Winkel BAC ist beyden Dreyecken gemein, also ist $\Delta ABC \backsim \Delta ADC$ und $AB : AC = AC : AD$. Da nun $AB = BC$, so ist $AC = CD$, und weil $DBC = BCD$, so ist $CD = DB$, also ist $AC = DB$ und $AB : BD = BD : DA$.

§. 172.

Da $ABC = \frac{1}{5}$ von zwey rechten oder $\frac{1}{10}$ von vier rechten Winkeln ist, so ist AC die Seite eines regulären Zehnecks, welches in einem Cirkel beschrieben werden kann, dessen Radius = AB.

§. 173.

Wenn man den Radius eines Cirkels AB in D so theilet, daß AB . AD = BD^2, ferner AC = BD macht und BC ziehet, so ist ABC ein Dreyeck, worin jeder Winkel an der Grundlinie AC doppelt so groß, als der Winkel in der Spitze ist. (IV. 10.)

§. 174.

Wenn man die Seite eines Zehnecks AC und die Seite eines Sechsecks CE, welche beyde in einem und demselbigen Cirkel beschrieben werden können, in einer graden Linie an einander setzet, so ist AE in C nach der äussern und mittlern Verhältniß getheilet, das ist, AE : EC = EC : CA. (XIII. 9.)

Denn AB : BD = BD : DA (§. 171. 172.), und hieraus folgt AB + BD : AB = BD + DA (= AB) : BD (§. 70. 68.). Es ist aber AB = CE und BD = AC, derowegen ist AE ; EC = EC : CA.

§. 175.

Das Quadrat der Seite eines regulären in einem Cirkel beschriebenen Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seiten des Zehnecks und Sechsecks, die in eben dem Cirkel beschrieben werden können. (XIII. 10.)

Man mache die Chorde CG = AC, und ziehe AG, so ist AG die Seite des Fünfecks. Es ist

nun

nun zu beweisen, daß $AG^2 = AB^2 + AC^2$. Zu dem Ende mache man $CF = CG$, so sind die Punkte G, F in der Peripherie eines Halbcirkels, der C zum Mittelpunkt hat, und durch A gehet, und folglich AGF ein rechter Winkel. Da $ACB = \frac{2}{5}$ von zwey rechten Winkeln $= BCG$, so ist $GCF = \frac{1}{5}$ von zwey rechten Winkeln $= DCA$; es ist aber $AC = CD = CG = CF$, und folglich ist $GF = AD$. Man setze nun die Seite des Sechsecks $AB = a$, die Seite des Zehnecks $DB = AC = b$, so ist $AD = GF = a - b$; $AG^2 = AF^2 - GF^2 = 4b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 3b^2 - a^2 + 2ab$. Nun ist AB nach der äussern und mittlern Verhältniß getheilt, und derowegen $AD = \frac{b^2}{a}$; man hat also die Gleichung $a - b = \frac{b^2}{a}$; $a^2 - ab = b^2$; $-2a^2 + 2ab = -2b^2$; $-a^2 + 2ab = a^2 - 2b^2$. Setzet man diesen Werth von $-a^2 + 2ab$ in dem Ausdrucke für AG^2, so erhält man $AG^2 = 3b^2 + a^2 - 2b^2 = a^2 + b^2$ oder $AG^2 = AB^2 + AC^2$.

§. 176.

In einem gegebenen Cirkel ein reguläres Fünfeck zu beschreiben. (IV. 11.)

Man richte aus dem Mittelpunkte des Durchmessers AB (Fig. 33.) den Radius FC senkrecht auf, und theile CB in E in zwey gleiche Theile. Aus E beschreibe man mit dem Radius EF einen Cirkelbogen, welcher den Durchmesser in D durchschnei-

schneidet. Ziehet man nun die Sehne FD, so ist selbige die gesuchte Seite des Fünfecks.

Man setze den Radius $FC = a$, so ist $CE = \frac{1}{2}a$, $FE = DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Man setze weiter $DC = b$, so ist $DE = b + \frac{1}{2}a$, $DE^2 = \frac{5}{4}a^2 = b^2 + ab + \frac{1}{4}a^2$; $a^2 = b(a+b)$ und $a+b : a = a : b$; $DB : BC = BC : DC$. Es ist aber CB die Seite des Sechsecks, demnach ist DC die Seite des Zehnecks (§. 174.) und indem $DF^2 = DC^2 + CF^2$, so ist DF die Seite des Fünfecks. (§. 175.)

Fünftes Kapitel.
Von der Stereometrie.

§. 177.

Wenn eine gradlinichte Figur ABC (Fig. 34.) sich längst einer Richtungslinie AD, die nicht mit ihr in einerley Ebene liegt, so beweget, daß sie durchgehends sich selbst parallel bleibet, das heißt, daß durchgehends $DPM = DAC$, $DPN = DAB$ und PM parallel mit AC ist, so entstehet ein **Prisma** DEFABC, welches grade (Prisma rectum) genannt wird, wenn DA auf die erzeugenden Fläche ABC senkrecht steht; schief (Prisma obliquum) aber, wenn AD gegen die Fläche ABC geneigt ist. Diese Prismata werden dreyeckigte, viereckigte u. s. w. genannt, je nachdem ihre Grundfläche ABC drey, vier oder mehr Winkel hat.

§. 178.

In der folgenden Anwendung der Algebra auf die Geometrie werden die 20 ersten Sätze des XIten Buchs der Euklideischen Elemente vorausgesetzt. Aus diesen Gründen ist klar, daß ein Schnitt PNM, der mit der Grundfläche ABC parallel geschicht, dem ABC gleich und ähnlich ist; daß ein Prisma eingeschlossen ist von zwey gleich grossen und ähnlichen gradlinichten Figuren ABC, DEF, die mit einander parallel liegen, und von so vielen Parallellogrammen AF, AE, BF, als die Grundfläche Seiten hat.

§. 179.

Wenn man anstatt einer gradlinichten Figur einen Cirkel AHB (Fig. 35.) annimmt, der sich nach einer ausser der Ebene desselben befindlichen Richtungslinie AD so beweget, daß sowohl der Cirkel als sein Durchmesser stets mit einander parallel sind, so entsteht ein Cylinder DGEBHA, welcher grade oder schief ist, je nachdem die Richtungslinie AD rechte oder schiefe Winkel mit der Ebene der Grundfläche macht. Die grade Linie CF, die die Mittelpunkte der beyden gegenüberstehenden Grundflächen zusammenhängt, wird die Axe des Cylinders genannt.

§. 180.

Wenn man eine gradlinichte Figur ACB (Fig. 36.) zur Grundfläche und ausser derselben einen

Punkt

Punkt D annimmt, und läßt eine grade Linie DA, die mit dem einen Ende in D befestiget ist, sich um den Perimeter der Grundfläche AB, BC, CA herumbewegen, bis sie wiederum in den Punkt A gekommen, von welchem aus die Bewegung ihren Anfang genommen, so schliesset diese Linie zugleich mit der Grundfläche eine körperliche Figur DACB ein, welche eine **Pyramide** genannt wird. Diese ist dreyeckigt, viereckigt u. s. w. je nachdem die Figur vieleckigt ist.

§. 181.

Die Oberfläche einer Pyramide besteht aus dem Inhalt der Grundfläche und so vielen Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat, welche sämtlich ihre gemeinschaftliche Spitze in D haben.

§. 182.

Man nehme auf DA einen Punkt P an, ziehe PM, PN parallel mit AB, AC und hänge die Punkte N und M durch NM zusammen. Da DPM=DAB und DPN=DAC, so ist △ PNM parallel mit △ ACB, und der Winkel NPM=CAB (XI. 10.); aus ähnlichen Gründen ist NMP=CBA, und folglich △ PNM ∽ △ ACB. **Wenn also eine Pyramide parallel mit der Grundfläche geschnitten wird, so ist der Schnitt PNM der Grundfläche ACB ähnlich;** welches auch statt findet, wenn die Grundfläche ein Vieleck wäre. (VI. 20.)

§. 183.

Nimmt man statt der gradlinichten Figur einen Cirkel AHB (Fig. 37.) zur Grundfläche an, so wird die körperliche Figur DAHB ein Kegel, dessen Axe die grade Linie DC ist, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt der Grundfläche vereiniget. Der Kegel ist grade oder schief, je nachdem DC rechte oder schiefe Winkel mit der Grundfläche macht. Die Seite des Kegels ist die grade Linie DA, welche auf der krummen Oberfläche von der Spitze D bis an einen Punkt A in der Peripherie der Grundfläche gezogen wird.

§. 184.

Ein grader Kegel ADBHA kann auch dadurch entstehen, daß ein rechtwinklichtes Dreyeck DCA sich um die eine der beyden Seiten DC, welche den rechten Winkel einschliessen, wie um eine Achse drehet.

§. 185.

Ein abgekürzter Kegel FEGBHA entstehet, indem ein Trapezoides FECA, worin die Winkel FEC und ECA rechte sind, sich um die Linie EC, wie um seine Achse drehet. Ueberhaupt aber, wenn man einen Kegel DAB in FG parallel mit der Grundfläche schneidet.

§. 186.

Wenn ein halber Cirkel AMB (Fig. 38.) sich um den Diameter AB drehet, und in dieser Bewegung

wegung Spuren hinter sich lässet, so entstehet eine Kugel. AB ist die Axe der Kugel; A und B sind ihre Pole; und C ist ihr **Mittelpunkt**.

§. 187.

Wenn man eine Kugel mit einer Ebene schneidet, so wird jedes Stück derselben ein sphärisches Segment, ein Kugelabschnitt genannt.

§. 188.

Den körperlichen Inhalt eines Parallelepipedum, Prismas und Cylinders zu finden.

Bewegt sich die Figur ABC (Fig. 39.) längst der Richtungslinie AD parallel mit sich selbst und so, daß auch ihre Seiten mit sich selbst parallel bleiben, so entstehet ein Parallelepipedum, wenn ABC ein Parallellogramm ist, ein Prisma, wenn ABC eine gradlinichte Figur ist, ein Cylinder wenn ABC ein Cirkel ist. Man setze die senkrechte Höhe der Figur $= b$, und den Inhalt der erzeugenden Fläche $ABC = a^2$. Man nehme an P bewege sich gleichförmig längs AG, und PM sey während der Bewegung stets senkrecht auf AG, und parallel mit sich. Führet ferner PM die erzeugende Figur MNQ mit sich, so kann man selbige als eine beständige Ordinate $= a^2$ ansehen, und folglich ist, wenn $AP = x$ und $Pp = dx$ gesetzt wird, die Fluxion der körperlichen Figur $= a^2 dx$, und folglich die Fluente $ABCMNQ = a^2 x$. Setzet man nun $x = b$, so ist $ABCDEF = a^2 b$.

Der

Der körperliche Inhalt eines Parallelepipedi, Prismas und Cylinders entstehet, indem man die Grundfläche mit der senkrechten Höhe multiplicirt.

§. 189.

Parallelepipeda, Prismata und Cylinder haben zu einander ein zusammengesetztes Verhältniß aus ihren Höhen und Grundflächen.

Man setze für den körperlichen Inhalt zweyer genannter Figuren Q^3, R^3, für ihre Grundflächen a^2, b^2 und für ihre Höhen c, d, so ist $Q^3 : R^3 = a^2c : b^2d = (a^2 : b^2) . (c : d)$ (§. 82.).

§. 190.

Hieraus folget ferner, daß, wenn $c = d$, so ist $Q^3 : R^3 = a^2 : b^2$ (XI. 32.). Wenn $a^2 : b^2 = d : c$, so ist $a^2c = b^2d$ oder $Q^3 = R^3$ (XI. 35.). Wenn $a^2 = b^2$, und $c = d$, so ist $Q^3 = R^3$ (XI. 29. 30. 31.).

§. 191.

Den körperlichen Inhalt einer dreyeckigten Pyramide DBCE (Fig. 40.) zu finden.

Aus einem Winkel in der Grundfläche B richte man die Linie BA senkrecht auf, und fälle aus der Spitze der Pyramide D eine Perpendiculare DA auf dieselbe. Man ziehe PM parallel mit AD, so wird dadurch die Seite BD in M geschnitten. Nun stelle man sich vor, daß der Punkt M von

A nach B mit gleichförmiger Bewegung fortgehe, und daß der Punkt M das Dreyeck MRN, welches ein Schnitt in der Pyramide parallel mit der Grundfläche ist, mit sich fortführe. Man setze $AB = a$, $BE = b$, $AP = x$, $Pp = dx$, $MN = y$. Nun ist $AP : AB (= x : a) = DM : DB = MN : BE = y : b$, also ist $ay = bx$ und $y = \frac{bx}{a}$. Eben so ist $\triangle MRN \backsim \triangle BCE$ (§. 182.) und derowegen $\triangle MRN : \triangle BCE = MN^2 : BE^2$ (§. 148.) $= y^2 : b^2$. Setzt man nun $\triangle MRN = z^2$ und $\triangle BCE = e^2$, so ist $y^2 : b^2 = z^2 : e^2$; $z^2 = \frac{e^2 y^2}{b^2} = \frac{e^2 b^2 x^2}{a^2 b^2} = \frac{e^2 x^2}{a^2}$. Die Fluxion der Pyramide wird vorgestellet durch $Pp . \triangle MRN = \frac{e^2 x^2 dx}{a^2}$, wovon die Fluente ist $DMRN = \int \frac{e^2 x^2 dx}{a^2} = \frac{e_2 x_3}{3 a^2}$ (§. 144.). Man setze $x = a = AB$, so ist $\frac{e^2 x^3}{3 a^2} = \frac{e^2 a^3}{3 a^2} = \frac{a e^2}{3} = \frac{1}{3} AB . \triangle BEC$.

Der körperliche Inhalt einer dreyeckigten Pyramide ist also gleich dem Producte aus dem Inhalt der Grundfläche und der senkrechten Höhe.

§. 193.

Da auch die Schnitte, welche parallel mit der Grundfläche in den vieleckigten Pyramiden und dem Kegel geschehen, sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer gleichnamichten Seiten oder ihrer Durchmesser (VI. 20. §. 167.), so gilt die vorige Regel auch von ihnen.

§. 194.

§. 194.

Das Verhältniß der Pyramiden und Kegel ist aus dem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt. Wenn sie also einerley Höhen haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundflächen, und umgekehrt. Wenn die Höhen und Grundflächen einander verkehrt proportional sind, so sind die Körper, wozu sie gehören, einander am Inhalte gleich.

§. 195.

Die krumme Oberfläche eines graden Cylinders ist einem Cirkel gleich, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist, zwischen der Seite und dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders.

Man setze die Seite des Cylinders $AC = PR = a$ (Fig. 41.), den Durchmesser der Grundfläche $AB = b$, $AP = x$, $Pp = dx$, den Diameter zur Peripherie wie $1 : \pi$, die Fluxion der Oberfläche $ACRP = adx$, und ihre Fluente $= ax$. Wenn man nun die Peripherie der Grundfläche πb in die Stelle von x setzet, so wird die krumme Oberfläche des graden Cylinders $= \pi ab$. Nimmt man z als den Radius eines Cirkels an, so ist dessen Peripherie $= 2\pi z$, und dessen Inhalt $= 2\pi z \cdot \frac{1}{2} z$ (§. 157.) $= \pi z^2$. Setzet man nun $\pi z^2 = \pi ab$, so ist $z = \sqrt{ab} = \sqrt{AC \cdot AB}$.

§. 196.

Eines graden Kegels krumme Oberfläche ist einem Cirkel gleich, dessen Radius eine mittlere Proportionallinie ist, zwischen der Seite des Kegels und dem Radius der Grundfläche.

Man setze die Seite des Kegels $AD = a$ (Fig. 42.), den Radius der Grundfläche $AC = c$, $AP = x$, $Pp = dx$, den Diameter zur Peripherie $= 1 : \pi$, so ist die Peripherie der Grundfläche $= 2\pi c$, die Fluxion der Fläche $ADP = \frac{1}{2} adx$, und die Fläche $ADP = \frac{1}{2} ax$. Setzet man nun $2\pi c$ für x, so ist die krumme Oberfläche des Kegels $= \pi ac$. Man nehme nun einen Cirkel an, dessen Radius $= z$, so ist der Inhalt davon $= \pi z^2$, und wenn man endlich $\pi z^2 = \pi ac$ setzet, so ist $z = \sqrt{ac} = \sqrt{AD.AC}$.

§. 197.

Ein abgekürzter Kegel ABDF (Fig. 43.) ist einem ganzen Kegel gleich, dessen Höhe einerley ist mit der Höhe des abgekürzten Kegels, und dessen Grundfläche eine Summe ist, aus den beyden Grundflächen des abgekürzten Kegels DHF, AKB und aus einer Figur, welche eine mittlere Proportionalgrösse ist zwischen den beyden Grundflächen des abgekürzten Kegels.

Die Fläche des Cirkels DHFD sey $= a^2$, der Inhalt des Cirkels AKBA sey $= b^2$, des ganzen

Kegels DGF Höhe CG sey $= c$, die Höhe des weggeschnittenen Kegels GE sey $= d$, so ist die Höhe des abgekürzten Kegels $CE = c - d$. Da $a^2 : ab = ab : b^2$ (§. 66.), so ist die Figur, welche eine mittlere Proportionalgrösse ist, zwischen den beyden Grundflächen des abgekürzten Kegels $= ab$. Der körperliche Inhalt des abgekürzten Kegels ist $DGF - AGB = \frac{a^2c - b^2d}{3}$ (§. 193.), und es ist also zu beweisen, daß dieser Ausdruck einerley sey mit $\frac{c-d}{3}(a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{3}(a^2c + b^2c + abc - a^2d - b^2d - abd)$. Es sey GDF ein Durchschnitt des Kegels längst dessen Axe; AB, DF die Durchmesser seiner beyden Grundflächen, so ist $DF : AB = GC : GE = c : d$; weiter ist $DF^2 : AB^2 = a^2 : b^2$ (§. 167.) und $DF : AB = a : b$; woraus folget $a : b = c : d$ und $ad = bc$. Wenn man also in den vorhergehenden Ausdruck bc statt ad setzet, so ist $\frac{1}{3}(a^2c + b^2c + abc - a^2d - b^2d - abd) = \frac{1}{3}(a^2c + b^2c + abc - abc - b^2d - b^2c) = \frac{a^2c - b^2d}{3}$.

§. 198.

Wenn man eine Pyramide parallel mit ihrer Grundfläche schneidet, so sind die beyden Grundflächen der abgekürzten Pyramide ähnliche Figuren, worin die Quadrate gleichnamichter Seiten sich wie die Flächen-Inhalte verhalten, und demnach gilt obiger Satz auch von abgekürzten Pyramiden.

§. 199.

Die krumme Oberfläche eines graden abgekürzten Kegels ist einem Cirkel gleich, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Seite des abgekürzten Kegels und der Summe der Radien beyder Grundflächen.

Die krumme Oberfläche des ganzen Kegels DGF (Fig. 43. 44.) sey dem Cirkel LNMP und die des abgeschnittenen AGB dem Cirkel HKL gleich, so ist die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels ABFD gleich dem Ringe LNMPHKL oder dem Unterschiede zwischen dem grösseren und dem kleineren Cirkel. Der Flächen-Inhalt dieses Ringes ist einem Cirkel gleich, dessen Radius die mittlere Proportionallinie HN zwischen LH und HM ist (§. 151.); denn LI^2 oder $NI^2 = HI^2 + NH^2$ und die Cirkel verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Radien. Man setze die Seite des Kegels $GD = a$, die Seite des abgeschnittenen Kegels $GA = b$, den Radius der grössern Grundfläche $= r$, so ist die Seite des abgekürzten Kegels $AD = a - b$, und da $GD : GA = DC : AE$ oder $a : b = r : AE = \frac{br}{a}$, so ist $\frac{br}{a}$ der Radius der kleinern Grundfläche. Nun ist $LI^2 = NI^2 = ar$ (§. 196.) und $HI^2 = \frac{b^2r}{a}$, derowegen ist $NH^2 = \frac{a^2r - b^2r}{a} = \frac{(a-b)(a+b)r}{a} = (a-b)(r + \frac{br}{a}) = AD(DC + AE)$ und folglich $NH = \sqrt{AD(DC + AE)}$.

§. 200.

Der Kugelabschnitt MAR (Fig. 45.) ist gleich dem Unterschiede zwischen dem Stück des umschriebenen Cylinders, den das Rechteck EP durch Umwälzung um seine Axe AC beschreibet, und dem abgekürzten Kegel, den der Trapezoides EQPA durch Umwälzung um dieselbe Axe beschreibt.

Es sey BAD eine halbe Kugel; BF ein um selbige beschriebener Cylinder, und ECF ein Kegel, der mit den beyden vorigen Körpern einer Grundfläche und Höhe AC hat. Man schneide diese drey Körper in NT parallel mit der Grundfläche, nehme Pp als die Fluxion von AP an, so verhalten sich die Fluxionen des Cylinders, der Kugel und des Kegels, wie die Cylinder, welche die Rechtecke nP, mP, qP um AC beschreiben, oder, weil alle diese Cylinder einerley Höhe haben, wie NP^2, MP^2, QP^2, oder wie MC^2, PC^2. Es ist aber $MC^2 =$, $MP^2 + PC^2$, man mag NT annehmen, wo man will; folglich ist die Fluxion des Cylinders NF jederzeit den Fluxionen des Kugelabschnitts MAR und des abgekürzten Kegels EQSF zusammengenommen gleich; und also (§. 123.) ist der Cylinder NF dem Kugelabschnitte MAR mit dem abgekürzten Kegel EQSF zusammengenommen gleich, woraus dasjenige folgt, was zu beweisen war.

§. 201.

Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders.

Nimmt man den Kugelabschnitt MAR so groß, als die halbe Kugel BAD an, so ist klar (§. 200.), daß der Cylinder BF der halben Kugel BAD und dem Kegel ECF zusammengenommen gleich sey. Der Kegel ECF ist aber $\frac{1}{3}$ des Cylinders BF (§. 188. 193.), derowegen ist die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ eben dieses Cylinders, und folglich die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders.

Anders. Man setze $BD = e$, den Diameter zur Peripherie wie $1:\pi$, $AP = x$, $Pp = dx$, $PM = y$, so ist der Natur des Cirkels zufolge (§. 152.) $y^2 = ex - x^2$, die Peripherie zu dem Diameter $MR = 2\pi y$, dieses Cirkels Inhalt $= \pi y^2$, die Peripherie des größten Cirkels $= \pi e$, dessen Inhalt $= \frac{1}{4}\pi e^2$, die Fluxion des Kugelabschnitts $MAR = \pi y^2 dx = \pi(exdx - x^2dx)$ und der Kugelabschnitt $MAR = \int \pi(exdx - x^2dx) = \pi(\frac{1}{2}ex^2 - \frac{1}{3}x^3)$. Setzet man nun e an die Stelle von x, so ist der Inhalt der ganzen Kugel $= \pi \cdot \frac{1}{6}e^3 = \pi e^2 . \frac{1}{6}e$, oder dem vierfachen Inhalte des größten Cirkels mit $\frac{1}{6}$ des Diameters oder $\frac{1}{3}$ des Radius multipliciret. Der Inhalt des umschriebenen Cylinders ist $\frac{1}{4}\pi e^3$, und folglich der Cylinder zur Kugel wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 6 : 4 = 3 : 2$, oder die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders.

§. 202.

Der Cylinder, die Kugel und der Kegel verhalten sich also (wenn der Diameter der Kugel dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders und des Kegels gleich ist,) zu einander, wie 3, 2, 1.

§. 203.

Die halbe Kugel ist dem Trichter CBECFDC gleich, der entsteht, indem sich das Dreyeck EBC um die Axe AC beweget.

§. 204.

Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Höhe der Radius der Kugel und dessen Grundfläche der vierfache größte Cirkel ist, das heißt, (§. 201.) $4 \cdot \frac{1}{4}\pi e^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} e = \frac{1}{6}\pi e^3$. Denn dieser Ausdruck enthält so wohl den Inhalt des besagten Kegels, als den Inhalt der Kugel (§. 201.).

§. 205.

Kugeln verhalten sich zu einander, wie die Würfel ihrer Durchmesser.

Man setze den Inhalt zweyer Kugeln S^3, s^3, ihre Durchmesser E, e, die Peripherien ihrer größten Cirkel P, p, so sind die Inhalte dieser Cirkel $\frac{1}{4}EP$, $\frac{1}{4}ep$, die Inhalte beyder Kugeln $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}E^2P$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}e^2p$, und folglich $S^3 : s^3 = \frac{1}{6}E^2P : \frac{1}{6}e^2p$; es ist aber $E : e = P : p$, derowegen ist auch $S^3 : s^3 = E^3 : e^3$. Und es ist $E^3 : S^3 = 300 : 157$. (§. 157.)

§. 206.

Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß ähnliche Prismata, Cylinder, Pyramiden und Kegel sich zu einander verhalten, wie die Würfel gleichnamichter Seiten, oder zu einander in dem dreyfachen Verhältnisse stehen.

§. 207.

Die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts MAR (Fig. 46.) ist dem entsprechenden Theile der krummen Oberfläche FE des um die Kugel beschriebenen Cylinders gleich; und die Oberfläche der ganzen Kugel ist 4 mal so groß, als der Inhalt des größten Cirkels derselben.

Es sey AMBR die Kugel, HE der umschriebene Cylinder, FG der Durchmesser eines Schnittes durch den Cylinder parallel mit dessen Grundfläche, und MR der Durchmesser eben dieses Schnittes in der Kugel. Beweget sich dieser Schnitt von FG in fg, so beschreibt F die Linie Ff und M den Bogen Mm; und sieht man Mm an als eine Tangente des Cirkels AMB im Punkte M, so sind Ff und Mm die Fluxionen von DF und dem Bogen AM. Sonach sind die Flächen, welche Ff und Mm beschreiben, indem sie sich um AB als Axe drehen; Fluxionen der krummen Oberfläche des Cylinders FE und der Oberfläche des Kugelabschnitts AMR. Diese Fluxion verhalten

halten sich nun zu einander, wie das Rechteck aus Ff und der Peripherie, die F um P beschreibt, zu dem Rechtecke aus Mm und der Peripherie, welche M und P beschreibt, das ist, wie das Rechteck aus Ff und der Peripherie des größten Cirkels zu dem Rechteck aus Mm und der Peripherie der Grundfläche des Kugelabschnitts MAR, da aber die Peripherien sich wie die Radien verhalten, so ist die Superficial-Fluxion des Cylinders FE, zur Superficial-Fluxion des Kugelabschnitts MAR wie Ff.FP:Mm.MP. Man ziehe MC, so ist △ mMn ∽ △ CMP und Mm : Mn (=Ff) =MC:MP, weswegen Mm.MP=Ff.MC, und da folglich die erwähnten Fluxionen einander gleich sind, so sind ihre Fluenten es auch, das heißt, die krumme Oberfläche des Cylinders FE und des Kugelabschnitts MAR sind einander gleich.

Da die Superficial-Fluxion des Cylinders der Fluxion der Kugelfläche durchgehends gleich ist, so folgt, daß die Kugelfläche so groß ist als die krumme Oberfläche des Cylinders, oder so groß, als die Peripherie des größten Cirkels multiplicirt mit dem Diameter, oder als der vierfache Flächen-Inhalt des größten Cirkels.

Anders. Es sey der Diameter AB=a, Pp=dx, PM=y, nm=dy. Der Natur des Cirkels zufolge ist $y^2=ax-x^2$ (§. 152.), die Peripherie, welche der Punkt M beschreibt $=2\pi y$ und diejenige,

ge, welchen der Punkt F beschreibt $=\pi a$. Da $\triangle Mmn \backsim \triangle MPC$, so ist $Mm:Mn = MC:MP$ das ist $\sqrt{dx^2+dy^2}:dx = \frac{1}{2}a:y$; $dx^2+dy^2 = Mm^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2dx^2}{y}$; $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{\frac{1}{2}adx}{y}$, und demnach die Fluxion der Oberfläche des Kugelabschnitts $= 2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2} = \pi adx$, mithin die Oberfläche des Kugelabschnitts $MAR = \pi ax$, oder einem Rechteck, welches von der Peripherie des größten Cirkels πa und der Höhe des Abschnitts x eingeschlossen ist, welches also der krummen Fläche des Cylinders FE gleich ist.

Setzt man in diesen Ausdruck a statt x, so ist die Oberfläche der Kugel der Oberfläche des Cylinders oder dem vierfachen größten Cirkel gleich.

Noch anders. Es ist zuvor (§. 203.) bewiesen, daß die halbe Kugel BAD (Fig. 45.) dem Trichter CBECFDC gleich ist. Für die Fluxion der halben Kugel kann man eine Pyramide annehmen, deren Spitze in dem Mittelpunkte der halben Kugel C und deren Höhe den Radius der Kugel gleich ist; und für die Fluxion des Trichters CBECFDC kann man eine Pyramide annehmen, deren Spitze gleichfalls in dem Mittelpunkte der Kugel ist, und deren Höhe BC ist. Da nun diese beyden Pyramiden gleich groß sind, und einerley Höhen haben, so müssen ihre Grundflächen, nemlich die Oberfläche der Kugel und die krumme Oberfläche des Trichters auch einander gleich seyn.

Nun

Nun sind aber diese Grundflächen die Fluxionen der Oberfläche der Kugel und der krummen Oberfläche des Trichters; derowegen ist die Oberfläche der halben Kugel der krummen Oberfläche des Trichters, das ist, des umschriebenen Cylinders gleich.

§. 208.

Nimmt man an, daß die Erzeugung der Kugel so wohl als des Trichters von dem Durchmesser BD anfange, so ist der Trichter CBNMCRTD allemal dem entsprechenden Kugelstücke BMRDB gleich; und eben so ist die Fläche, welche BN sich um AC bewegend beschreibet, gleich der Fläche, welche der Bogen BM um eben diese Axe bewegt beschreibet.

§. 209.

Die sphärische Fläche des Kugelabschnitts MAR (Fig. 46) ist einem Cirkel gleich, dessen Radius die Sehne MA.

Denn diese Kugelfläche ist gleich der Cylindrischen, welche DF beschreibet, das ist, einem Cirkel, dessen Radius die mittlere Proportionallinie zwischen DF und FG (§. 195.) $=\sqrt{DF.FG}=\sqrt{AP.AB}$ ist. Man ziehe MB, so ist $\triangle AMB \backsim \triangle AMP$ und AP:AM=AM:AB folglich $AM=\sqrt{AP:AB}$.

§. 210.

Zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Mit

Mit den gegebenen Linien A und B (Fig. 47.) verzeichne man das Rechteck DG, so daß DE = A, und DF = B genommen wird, und ziehe die Diagonalen FE, DG, welche sich im Mittelpunkte C kreutzen. Durch G ziehe man eine grade Linie HI, welche die verlängerten Seiten des Rechtecks so schneidet, daß CI = CH wird. Setzet man nun X = HF, Y = EI so ist ∺ A, X, Y, B.

Man beschreibe aus C durch H einen Cirkel, welcher auch durch I gehet, verlängere HD, und ID bis sie die Peripherie des Cirkels in N und M erreichen, und fälle aus C senkrechte Linien auf FD und DE. Da MK = KI (III. 3.) und DK = KE (III. 31. I. 26.), so ist MD = EI, und aus eben den Gründen ist DN = HF. Nun ist MND = DIH (III. 27.) und MDN = HDI, derowegen ist △ MDN ∽ △ HDI ∽ △ HFG ∽ △ GEI, woraus folget, daß FG : FH = ND : DM = IE : EG, und wenn man die ihnen gleiche Linien an ihre Stelle setzet, daß DE : HF = HF : EI = EI : DF oder A : X = X : Y = Y : B, und folglich ∺ A, X, Y, B.

§. 212.

Nimmt man an, daß ∺ a, x, y, b, so ist $ab = xy$, und $ay = x^2$, woraus folget $y = \frac{ab}{x} = \frac{x^2}{a}$; $x^3 = a^2 b$ und $x = \sqrt[3]{a^2 b}$.

§. 213.

Da $a^3 : x^3 = a : b$ (§. 81.), so kann man hieraus finden, wie man einen Würfel verzeichnen soll,

soll, der zu einem gegebenen Würfel a^3 ein gegebenes Verhältniß a : b hat.

§. 214.

Einen Würfel zu finden, der einem gegebenen rechtwinklichten Parallelepipedum DCAB (Fig. 48) gleich ist.

Man suche die mittlere Proportionallinie EF zwischen den Seiten der Grundfläche AB und AD. Man bestimme ferner zwey mittlere Proportionallinien zwischen EF und AC, von welchen GH die erste seyn mag, so ist GH die Seite eines Würfels, der dem gegebenen Parallelepipedum gleich ist.

Man setze $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$, $EF = d$, $GH = m$. Da nun $\div\!\div$ d, m, $_*$, c, so ist $m = \sqrt[3]{d^2c}$ (§. 212.) und da $\div\!\div$ a, d, b, so ist $d = \sqrt{ab}$, $d^2 = ab$; mithin ist $m^3 = d^2c = abc = GH^3 = AB \cdot AD \cdot AC$.

§. 215.

Hieraus erhellt, daß es keine körperliche Figur gebe, die sich nicht in einem Würfel verwandeln lasse. Denn Kegel und Kugeln lassen sich in Cylinder verwandeln, und diese so wohl als die Prismata und Pyramiden in rechtwinklichte Parallelepipeda, welche Quadrate zu Grundflächen haben, und diese endlich in Würfel. Es sey der Ausdruck einer körperlichen Figur überhaupt $\frac{r}{n}fgh$, worin man $a = \frac{r}{n}f$, $b = g$ und $c = h$ annehmen kann, so ist $d^2 = \frac{rfg}{n}$ und $m = \sqrt[3]{\frac{rfgh}{n}}$.

Sechstes Kapitel.

Von der Parabel.

§. 216.

Auf einer graden Linie BPP (Fig. 49.) nehme man BA = AF an, und ziehe durch die unterhalb A verlängerten Linie BA mehrern Linien MM, welche sie in P, P rechtwinklicht durchschneiden, man mache jedes FM dem ihm zugehörigen *PB* gleich, und ziehe durch die Punkte M, M, A, M, M eine krumme Linie, so wird selbige eine **Parabel** genannt.

§. 217.

Man nennt die Linie AP die Axe der Parabel, AB *sublimitas parabolæ*, A ihren **Scheitelpunkt**, (Vertex primarius), F den **Brennpunkt**, AP die Abscisse, PM die Semiordinate oder **Ordinate**, und die grade Linie NR, welche durch B auf die Axe der Parabel senkrecht gezogen wird, die **Richtungslinie** der Parabel (Directrix parabolæ).

§. 218.

Eine Linie BR = 4AF = 4AB heißt der **Parameter** der Parabel zu der Axe. Eine grade Linie, welche die Parabel in einem Punkte berühret, sie aber verlängert nicht schneidet, ist eine Tangente der Parabel an diesem Punkte.

§. 219.

§. 219.

In einer Parabel ist das Rechteck aus der Abscisse und dem Parameter gleich dem Quadrate der Ordinate; das ist, $AP \cdot BR = PM^2$.

Es sey $AF = a$, $AP = x$, $PM = y$, so ist $BP = FM = a + x$ und $FP = x - a$, $FM^2 = a^2 + 2ax + x^2$, $FP^2 = X^2 - 2ax + a^2$, $PM^2 = MF^2 - FP^2$ oder $y^2 = a^2 + 2ax + x^2 - x^2 + 2ax - a^2$; $y^2 = 4ax$; $PM^2 = AP \cdot BR$.

§. 220.

In einer Parabel verhalten sich die Abscissen, wie die Quadrate der Ordinaten.

Wenn man zwey Abscissen x, v, die ihnen zugehörigen Ordinaten y, z und den Parameter zu der Axe p nennt, so ist $y^2 = px$ (§. 219.) und $z^2 = pv$, woraus folgt $px : pv = x : v = y^2 : z^2$.

§. 221.

Hieraus folgt, daß wenn man AS durch A parallel mit NR ziehet, so ist $AL^2 : AL^2 = LM : LM$.

§. 222.

An einem gegebenen Punkte M in der Parabel eine Tangente MT (Fig. 50.) zu ziehen.

Man ziehe die Linie MF aus dem gegebenen Punkte in den Brennpunkt F, und MN, welche die Directrix in N erreichet, parallel mit der Axe AP; man theile hierauf den Winkel NMF durch

die Linie MT in zwey gleiche Theile, so ist MT eine Tangente der Parabel au dem Punkte M.

Denn nimmt man einen andern Punkt in S für den Berührungspunkt an, so sage ich, daß der Punkt S ausserhalb der Parabel lieget. Man ziehe NF, SN, SF und SO parallel mit AP. Da MF=BP (§. 216.)=MN, NMD=FMD, so ist ND=DF, und die Winkel NDM, FDM sind rechte; folglich sind in den Dreyecken NSD, DSF, SN=SF; es ist aber SN > SO, mithin ist auch SF > SO. In der Parabel sollte aber SF=SO seyn, und folglich kann der Punkt S nicht in der Parabel liegen, sondern er liegt ausserhalb derselben, indem er der Directrix näher als dem Brennpunkte der Parabel ist.

§. 223.

Die Linie TP zwischen dem Punkt T, wo die Tangente die Axe der Parabel schneidet, und dem Punkt P, wo die Ordinate in die Axe fällt, wird die Subtangente genannt. Eine Linie MQ, die aus dem Berührungspunkte M senkrecht auf die Tangente MT aufgerichtet wird, und die Axe in Q schneidet, wird die Normale, und der Theil der Axe PQ, der zwischen der Ordinate und dem Punkte Q lieget, wird die Subnormale genannt.

§. 224.

In der Parabel ist die Subnormale PQ dem halben Parameter gleich.

Die Linien MQ und NF sind beyde senkrecht auf die Tangente MT und folglich mit einander parallel. Sie sind überdem auch einander gleich, weil NQ ein Parallelogramm ist. Ferner sind die Dreyecke NBF, MPQ ähnlich und gleich, und deswegen ist BF = PQ. Nun ist BF = 2BA = $\frac{1}{2}$ Parameter (§. 218.), folglich ist die Subnormale PQ dem halben Parameter gleich.

§. 225.

In der Parabel ist die Subtangente PT der doppelten Abscisse AP gleich.

Man setze den Parameter = p, AP = x, PM = y, so ist $y^2 = px$ (§. 219.), und QP = $\frac{1}{2}$p (§. 224.). Da nun △ QPM ∽ △ PMT so ist QP : PM = PM : PT oder $\frac{1}{2}p : y = y : PT = \frac{2y^2}{p}$, und wenn man den Werth von y^2 darin setzet, $PT = \frac{2px}{p} = 2x = 2AP$.

§. 226.

Hieraus folgt eine sehr bequeme Art an einem Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen. Man fälle aus dem gegebenen Punkte M eine Perpendikulare MP auf die Axe, mache AT = AP und ziehe durch M und T eine grade Linie, so ist selbige eine Tangente der Parabel in M.

§. 227.

Wenn man aus einem Punkte E in der Parabel eine Linie EQ (Fig. 51.) parallel mit der Axe AI ziehet, so nennt man selbige einen **Durchmesser** der Parabel.

§. 228.

Wenn man in einer Parabel eine Sehne NM parallel mit LT, welche die Parabel in E berühret, ziehet, so wird NM in P von dem Durchmesser EQ, der durch den Punkt E gehet, in zwey gleiche Theile getheilet.

Es sey AI die Axe der Parabel, F der Brennpunkt; man ziehe durch E, M und N die Ordinaten ED, MO, NI senkrecht auf die Axe; und verlängere QE und OM bis sie einander in G durchschneiden. Man setze $AH = m$, $HO = GP = t$, $HI = PK = u$, $AD = x$, $DE = y$, so ist $AO = m - t$, $AI = m + u$, $DH = EP = m - x$. Da die Dreyecke TDE, GPM und NPK einander ähnlich sind, so ist

$$TD : DE = PK : KN ; \quad TD : DE = PG : GM$$

$$2x : y = u : \frac{uy}{2x} ; \quad 2x : y = t : \frac{ty}{2x}$$

weswegen $MO = y - \frac{ty}{2x}$; und $NI = y + \frac{uy}{2x}$

$$MO^2 = y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2y^2}{4x^2} ; \text{ und } NI^2 = y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2y^2}{4x^2}$$

$AD : AI = ED^2 : NI^2$ (§. 220.); $AD : AO = ED^2 : MO^2$

$$x : m + u = y^2 : y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2y^2}{4x^2} ; \quad x : m - t = y^2 : y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2y^2}{4x^2}$$

$$x : m + u = 1 : 1 + \frac{u}{x} + \frac{u^2}{4x^2} ; \quad x : m - t = 1 : 1 - \frac{t}{x} + \frac{t^2}{4x^2}$$

Sub-

Subtrahiret man von $m + u = x + u + \frac{u^2}{4x}$

$$m - t = x - t + \frac{t^2}{4x}$$

so bleibt übrig $u + t = u + t + \frac{u^2 - t^2}{4x}$,

woraus folget $0 = u^2 - t^2$; $t^2 = u^2$; $t = u$ oder $PG = PK$, und folglich auch $PN = PM$.

§. 229.

Solche Linien, wie PN, PM, die parallel mit einer Tangente ET gezogen sind, werden Ordinaten des Durchmessers EQ genennet.

§. 230.

Alle Ordinaten der Durchmesser in der Parabel stehen auf den Durchmessern unter schiefen Winkeln; nur die der Axe allein stehen rechtwinklicht auf dieselbe.

§. 231.

Viermal der Abstand des Scheitelpunkts E des Durchmessers EQ von dem Brennpunkte der Parabel F, das ist 4EF wird der Parameter des Durchmessers EQ genannt.

§. 232.

Das Quadrat einer jeden Ordinate PM des Durchmessers EQ ist gleich dem Rechtecke aus dem Parameter dieses Durchmessers

4EF und der zur gedachten Ordinate gehörigen Abscisse EP, oder $PM^2 = 4EF \cdot EP$.

Man behalte die vorigen Benennungen (§. 228.) bey, und setze $AF = a$, $EF = b$, $m - x = EP = v$, $PM = z$. Da es bewiesen, daß $t = u$, so ist (§. 228.) wenn man t für u in die Gleichung $m + u = x + u + \frac{u^2}{4x}$ setzet,

$$m + t = x + t + \frac{t^2}{4x}$$

eben so ist $m - t = x - t + \frac{t^2}{4x}$

wovon die Summe $2m = 2x + \frac{2t^2}{4x}$; woraus man $m = x + \frac{t^2}{4x}$; $4mx = 4x^2 + t^2$; $4(m-x)x = t = 4vx$ erhält. Nun ist $PM^2 = PG^2 + GM^2$, oder $z^2 = t^2 + \frac{t^2 y^2}{4x^2}$, und da $y^2 = 4ax$, so ist $z^2 = 4vx + \frac{4vx \cdot 4ax}{4x^2}$; $z^2 = 4vx + 4av = 4(a+x)v = 4(BA + AD) \cdot EP = 4EF \cdot EP = PM^2$.

§. 233.

Hieraus siehet man, daß der vorhergehende Lehrsatz (§. 219.) allgemein ist, so daß also, wenn p der Parameter eines beliebigen Durchmessers, x die Abscisse und y die Ordinate ist, so ist allezeit in der Parabel $y^2 = px$. Also ist der Parameter die dritte Proportionallinie zur Abscisse und der Ordinate.

§. 234.

Wenn man aus einem Punkt N in der Parabel eine Perpendikularlinie NK auf den Durchmesser EQ fället, und durch eben den Punkt N eine Ordinate NM ziehet, so ist $NK^2 = 4a \cdot EP$, wenn 4a der Parameter der Axe AI ist.

Denn $m = x + \frac{t^2}{4x^2}$ (§. 232.) $= x + \frac{u^2}{4x}$ (§. 228.); $m - x = \frac{u^2}{4x}$; $(m-x)y^2 = \frac{u^2y^2}{4x}$; es ist aber $y^2 = 4ax$, derowegen ist auch $(m-x)\,4ax = \frac{u^2y^2}{4x}$; $(m-x)\,4a = \frac{u^2y^2}{4x^2}$, das ist, $4a \cdot EP = NK^2$.

§. 235.

Hieraus folget, daß wenn man aus zweyen Scheitelpunkten A und E (Fig. 52.) in der Parabel die Ordinaten PA, DE der Durchmesser AD, EP ziehet, so sind die Abscissen AD, EP einander gleich; indem die senkrechten Linien NK, GA, EH und folglich auch ihre Quadrate einander gleich sind.

§. 236.

Die Subtangente DT auf einem jeden mit der Axe parallel gezogenem Durchmesser AD ist doppelt so groß, als die Abscisse AD.

Denn ET ist parallel mit PA (§. 228.), und folglich PT ein Parallellogram. Demnach ist EP = TA = AD (§. 235.) und endlich DT = 2AD.

§. 237.

Die Axe, den Parameter und dem Brennpunkt einer gegebenen Parabel CAK (Fig. 53.) zu finden.

Man ziehe zwey paralleln Sehnen CD, EG und theile selbige in H und I in zwey gleiche Theile. Die Linie BHI, welche durch diese Theilungspunkte geht, ist ein Durchmesser der Parabel. (§. 228.) Ziehet man ferner CK senkrecht auf BI, theilet CK in L in zwey gleiche Theile und leget durch L die Linie AL parallel mit BI, so ist AL die Axe der Parabel. (§. 216.) Um den Parameter p zu finden, schliesse man AL : LK = LK : p (§. 233.). Nimmt man auf der Axe $AF = \frac{1}{4}p$, so ist F der Brennpunkt (§. 217.).

§. 238.

Der Inhalt der Parabel CAM (Fig. 54.) verhält sich zu dem Parallelogram CE der Coordinaten AP und CM, dessen Winkel mit den Winkeln der Ordinaten und des Durchmessers einerley sind, wie 2 : 3.

Man setze den Parameter $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $MN = dy$: man nehme an, die Parallelogramme PN und MB stellen die gleichzeitigen Fluxionen der Fläche AMP und der Fläche MAEM vor. Da diese Parallelogramme gleichwinklicht sind, so verhält sich $Pn : MB = PM . Mn : ME . MN = ydx : xdy$; nun ist $y^2 = ax$,

folglich

folglich $2ydy = adx$; $\frac{2ydy}{a} = dx$; mithin ist $Pn : MB = \frac{2y^2 dy}{a} : xdy = 2y^2 : ax = 2y^2 : y^2 = 2 : 1$. Dem zufolge ist die Fluxion von PAM zur Fluxion von MAEM $= 2 : 1$, und die Fläche MAP doppelt so groß, als die Fläche MAEM, oder CAM $= 2$ACDAEMA, und folglich die Fläche der Parabel CAM zu dem Parallelogram wie $2 : 3$.

§. 239.

Wenn man einen Kegel ABC (Fig. 55.) parallel mit einer Seite AC schneidet, so ist der Schnitt KeI eine Parabel.

Man schneide den Kegel mit einer Ebene GH parallel mit der Grundfläche, so ist der Schnitt ein Cirkel, worin GH der Durchmesser ist, welcher in dem Dreyecke ABC, dem Schnitt des Kegels durch die Axe liegt. Man schneide hierauf den Kegel mit der Ebene KeI, so daß selbige senkrecht auf dem Dreyecke ABC stehet, so ist MN senkrecht auf GH, PM $=$ PN und ePM ein rechter Winkel. Man mache AD $=$ PH, und ziehe DE parallel mit PH, so ist ED der Parameter der Parabel. Es sey $AD = PH = a$, $eP = x$, $PM = y$, $ED = p$; da nun $\triangle AED \backsim \triangle ePG$ so ist $AD : DE = eP : PG$, das ist, $a : p = x : PG = \frac{px}{a}$; es ist aber $GP \cdot PH = PM^2$ (§. 151.), mithin ist $\frac{px}{a} \cdot a$ oder $px = y^2$, und also KNeMI eine Parabel, deren Parameter $= p$. (§. 219.)

Siebentes Kapitel.
Von der Ellipse.

§. 240.

Man ziehe in einem Cirkel (Fig. 56.) zwey Durchmesser AB, GH senkrecht auf einander, und setze aus dem Mittelpunkte C, CD=CE ab, wovon ein jedes kleiner, als der Radius CG ist. Nachdem man hierauf die Ordinaten PN im Cirkel parallel mit CG gezogen, mache man GC : CD = PN : PM, so ist M ein Punkt in der krummen Linie AMDBE, welche Ellipse genannt wird.

§. 241.

AB ist die **grosse Axe** der Ellipse; DE die **kleine** oder **conjugirte Axe**; C der **Mittelpunkt** derselben. Wenn man ∺ AB, DE, p nimmt, so ist p der **Parameter** zur Axe AB; wenn man aber ∺ DE, AB, p nimmt, so ist p der Parameter zu der kleinen Axe DE. Man setze auf der grossen Axe zwey Punkte F, f dergestalt ab, daß DF=Df=AC, so sind F, f die **Brennpunkte** der Ellipse.

§. 242.

Wenn man in einer Ellipse eine Ordinate PM der grossen Axe AB ziehet, so ist das Rechteck APPB : $PM^2 = AC^2 : CD^2$ oder $AB^2 : DE^2$.

Da

Da PN : PM = CG : CD (§. 240.) so ist $PN^2 : PM^2 = CG^2 : CD^2$; es ist aber $PN^2 = AP . PB$, derowegen ist $AP.PB : PM^2 = CG^2 : CD^2 = AC^2 : CD^2$.

§. 243.

Es sey die halbe grosse Axe AC = a, die halbe kleine Axe CD = b; man setze den Anfang der Abscissen in den Mittelpunkt C, die Abscisse CP = x, die Ordinate PM = y, so ist AP = a-x, und folglich $a^2 - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$, woraus man erhält $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$; eine Gleichung, die die Natur der Ellipse, die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet, ausdrückt. Setzet man aber AB = a, DE = b, AP = x, PM = y, so ist $ax - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$ oder $y^2 = \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, welche gleichfalls eine Gleichung für die Natur der Ellipse ist, wenn man die Abscissen vom Scheitelpunkt A anrechnet.

§. 244.

In einer Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Rechtecke aus den ihnen entsprechenden Theilen der Axe. Das ist $PM^2 : QR^2 = AP . PB : AQ . QB$.

Es ist nemlich $CG^2 : CD^2 = AP . PB : PM^2 = AQ . QB : QR^2$, folglich ist auch $PM^2 : QR^2 = AP . PB : AQ . QB$.

§. 245.

Da $a^2 - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$ (§. 243.) so ist $a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2$; $a^2 b^2 - a^2 y^2 = b^2 x^2$, folglich $b^2 - y^2 : x^2 = b^2 : a^2$; $b^2 - y^2 = (b-y)(b+y) = DS.SE$, und demnach $DS.SE : MS^2 = DC^2 : CA^2$. Hieraus erhellet, daß die Eigenschaft der Ellipse unverändert bleibt (§. 242.), man mag die Ordinaten auf der grossen oder der kleinen Axe ziehen.

§. 246.

Da $a : b = b : p$ (§. 241.) so ist auch $a^2 : b^2 = a : p$; eben so ist $a^2 - {}^2x^2 : y^2 = a^2 : b^2$, woraus $a^2 - x^2 : y^2 = a : p$ und $y^2 = ap - \frac{px^2}{a}$ folgt: eine Gleichung der Ellipse, worin a die grosse Axe, p ihren Parameter, x die Abscisse vom Mittelpunkt angerechnet, und y die dazu gehörige Ordinate bedeutet.

§. 247.

Wenn man aus einem Punkt M in der Ellipse (Fig. 57.) nach beyden Brennpunkten F, f grade Linien ziehet, so ist FM + fM = Aa der grossen Axe.

Es sey $AC = a$, $BC = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist $CF = Cf = \sqrt{a^2 - b^2}$, $FP = \sqrt{a^2 - b^2} - x$, $Pf = \sqrt{a^2 - b^2} + x$. Dem zufolge ist $FM^2 = FP^2 + PM^2$ $= a^2 -- b^2 -- 2x\sqrt{a^2 -- b^2} + x^2 + b^2 -- \frac{b^2 x^2}{a^2}$ $= a^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2}$; und $fM^2 = Pf^2 + PM$

$= a^2$

$= a^2 + x^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2}$; folglich $FM = a - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, und $fM = a + \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ und endlich $FM + fM = 2a = Aa$.

§. 248.

Demnach läßt sich eine Ellipse sehr leicht verzeichnen, wenn die Axen Aa und 2BC gegeben sind. Man sucht zuerst die Brennpunkte F, f (§. 241.), macht RS = Aa, RV > AF und zeichnet auf der Grundlinie Ff ein Dreyeck FMf, worin FM = RV, und Mf = VS, so ist der Punkt M in der Ellipse.

§. 249.

Wenn man fM in N verlängert, so daß MN = MF wird, und den Winkel NMF mit der Linie MT in zwey gleiche Theile theilet, so ist MT eine Tangente der Ellipse in M.

Man nehme an, MT berühre die Ellipse noch in einem andern Punkte O, und ziehe Of, OF, ON. Da MN = MF, NMO = OMF, so ist NO = FO, NO + Of = FO + Of = Aa, in so ferne der Punkt O in der Ellipse ist (§. 247.); weiter ist FM + Mf = Nf = Aa und also NO + Of = Nf, welches ungereimt ist.

§. 250.

Wenn die Tangente MT die Axe in T und die Ordinate PM die Axe in P durchschneidet, so ist CP : CA = CA : CT.

Es sey CA=a, CF=Cf=t, CT=s, CP=x, so ist (§. 247.) $FM=a-\frac{tx}{a}$, $fM=a+\frac{tx}{a}$, FT=s-t, fT=s+t. Ziehet man nun FN, fE senkrecht auf TE, so ist △ EMf ∽ △ NMD oder DMF und deswegen fM:MF=fE:FD=fF:FT, das ist $a+\frac{tx}{a}:a-\frac{tx}{a}=s+t:s-t$; $a^2:a^2+tx=s:s+t$ woraus man $a^2s+a^2t=a^2s+stx$; $a^2=sx$, x:a=a:s oder CP:CA=CA:CT erhält.

§. 251.

Wenn die grosse Axe Aa und ein Punkt in der Ellipse gegeben, so kann man diesem Lehrsatz zufolge die Tangente MT ziehen.

§. 252.

Eine jede Linie CD (Fig. 58.), die durch den Mittelpunkt G der Ellipse geht, und sich in ihrer Peripherie endiget, wird ein **Durchmesser der Ellipse** genannt. Ziehet man einen Diameter FE parallel mit der Tangente CO, so ist FE der **conjugirte Durchmesser** zu dem Durchmesser CD. Eine jede Linie IS, welche mit dem conjugirten Durchmesser parallel gezogen wird, und die Ellipse in I und S durchschneidet, ist eine **Ordinate des Durchmessers** CD. Die dritte Proportionallinie zu zwey conjugirten Durchmessern ist der **Parameter desjenigen Durchmessers**, der in der Proportion voranstehet.

§. 253.

AB, QP sind die Axen der Ellipse; CD ist ein Durchmesser; durch C wird eine Tangente CO; mit derselben parallel durch den Mittelpunkt G der conjugirte Durchmesser FE gezogen; man fällt von C und E die Ordinaten CK, EP auf die Axe; und es ist sodann GK.KO = AK.KB.

Es sey GA = a, GK = x, KO = z; da nun CO eine Tangente ist, so ist (§. 250.) GK : GA = GA : GO, das ist $x : a = a : x + z$ und $x^2 + xz = a^2$; $xz = a^2 - x^2$ das ist GK.KO = AK.KB.

§. 254.

In der Ellipse ist, wenn dieselbe Verzeichnung beybehalten wird, $GP^2 = AK.KB$.

Man behalte die vorige Benennung bey, und setze ausserdem GP = f. Da nun (§. 244.) $AK.KB : AP.PB = KC^2 : PE^2$, und $a^2 = xz + x^2$, wie auch △ OCK ∽ △ GPE, und folglich $KC^2 : PE^2 = KO^2 : PG^2$, so ist $xz : xz + x^2 - f^2 = z^2 : f^2$, und hieraus $xzf^2 = xz^3 + x^2z^2 - f^2z^2$; $xf^2 = xz^2 + x^2z - f^2z$; $xf^2 + f^2z^2 = xz^2 + x^2z$; $f^2(x + z) = xz(x + z)$; $f^2 = xz$, das ist $GP^2 = AK.KB$.

§. 255.

Aus eben den Gründen ist auch $GK^2 = AP.PB$.

§. 256.

Wenn man IS parallel mit der Tangente CO zieht, so ist $CH . HD : HI^2 = CD^2 : FE^2$.

Man ziehe IN, HL parallel mit der Axe QR, und HM parallel mit der Axe AB. Man setze $GK = x$, $KC = y$, $GA = a$, $KO = z$, $HM = LN = c$, $GL = g$, $GC = s$. Da $\triangle GKC \backsim \triangle GLH$, so ist $GK : KC = GL : LH$, das ist, $x : y = g : \frac{gy}{x} = LH$. Ferner ist $\triangle COK \backsim \triangle IHM$ und $KO : KC = HM : IM$ oder $z : y = c : \frac{cy}{z} = IM$. Es ist aber $LH + IM = IN = \frac{gy}{x} + \frac{cy}{z}$, u. $IN^2 = \frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{2cgy^2}{xz} + \frac{g^2y^2}{x^2}$; $GN = LN - LG = c - g$, und $GN^2 = c^2 - 2cg + g^2$. Nun ist $AK . KB : AN . NB (= GB^2 - GN^2) = KC^2 : IN$, d. i. $a^2 - x^2 : a^2 - c^2 + 2cg - g^2 = y^2 : \frac{a^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy - g^2y^2}{a^2 - x^2} = IN$, woraus man die Gleichung erhält $\frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{2cgy}{xz} + \frac{g^2y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy - g^2y^2}{a^2 - x^2}$. Es ist aber $xz = a^2 - x^2$ (§. 253.) derowegen ist $\frac{c^2}{z^2} + \frac{g^2}{f^2} = \frac{a^2 - c^2 - g^2}{a^2 - x^2}$; $\frac{c^2x^2}{z^2} + g^2 = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - g^2x^2}{a^2 - x^2}$; $\frac{c^2x^2}{z^2} = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - g^2x^2 - a^2g^2 + g^2x^2}{a^2 - x^2}$; $\frac{c^2x^4}{z^2x^2} = \frac{c^2x^4}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - a^2g^2}{a^2 - x^2}$; $\frac{c^2x^4}{a^2 - x^2} = a^2x^2 - c^2x^2 - a^2g^2$; $c^2x^4 = a^4x^2 - a^2c^2x^2 - a^4g^2 - a^2x^4 + c^2x^4 + a^2g^2x^2$; $a^2c^2x^2 = a^4x^2 - a^4g^2 - a^2x^4 + a^2g^2x^2$; $c^2 = a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2g^2}{x^2} = LN^2$

= H

$= HM^2$. Da $\triangle GKC \backsim \triangle GLH$, so ist $GK:GC = GL:GH$ das ist $x:s = g:\frac{sg}{x} = GH$. Es ist aber $CH.HD = GC^2 - GH^2 = s^2 - \frac{s^2g^2}{x^2} = \frac{s^2x^2 - s^2g^2}{x^2}$. Und da diese vier Grössen $\frac{s^2x^2-s^2g^2}{x^2} : a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2g^2}{x^2} = s^2 : a^2 - x^2$ eine Proportion ausmachen, so ist auch $CH.HD : HM^2 = GC^2 : AK.KB \; (= GP^2)$ (§. 254.). Nun ist auch $HM^2 : GP^2 = HI^2 : GE^2$, derowegen ist $CH.HD : HI^2 = GC^2 : GE^2 = CD^2 : FE^2$.

§. 257.

Daß CD in G in zwey gleiche Theile getheilet ist, erhellt so: zu den gleichen Abscissen GK, GT gehören gleiche Ordinaten KC, TD, folglich sind die Winkel CGK und TGD einander gleich, und wenn man die Punkte G, C, und G, D zusammenhängt, so ist GCD eine grade Linie, wie auch $CG = GD$. Man siehet hieraus, daß eine jede Linie IH, die in der Ellipse parallel mit der Tangente CO gezogen ist, und die Linie CGD schneidet, welche durch den Berührungspunkt C und den Mittelpunkt der Ellipse G gehet, eben die Eigenschaft hat, welche die Ordinaten der Axen haben (§. 242.).

§. 258.

Die Summe der Quadrate beyder Axen in einer Ellipse ist gleich der Summe der Quadrate zweyer conjugirter Durchmesser.

Wenn $GA=a$, $QG=b$, $GK=x$, $KC=y$, so ist $GP^2=a^2-x^2$ (§. 254.) und $GA^2-GP^2=AP.PB=GK^2=x^2$ (§. 255.). Nun ist $GA^2:GQ^2=AP.PB:PE^2$, das ist, $a^2:b^2=x^2:\frac{b^2x^2}{a^2}$ und $GA^2:GQ^2=AK.KB:KC^2$, das ist $a^2:b^2=a^2-x^2:\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$. Da aber $GP^2+PE^2=EG^2$, das ist $a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=EG^2$ und $GK^2+KC^2=GC^2$ oder $x^2+\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}=GC^2$, so ist $EG^2+GC^2=a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+x^2+\frac{a^2b^2\quad b^2x^2}{a}=a^2+b^2$, und folglich $AB^2+QR^2=FE^2+CD^2$.

§. 259.

In einer gegebenen Ellipse einen Durchmesser zu ziehen, den Mittelpunkt zu bestimmen, den conjugirten Durchmesser zu dem ersten, nebst den beyden Axen, zu finden.

Man ziehe in der Ellipse zwey paralleln Sehnen, IS und FE, theile sie in H und G in zwey gleiche Theile und ziehe durch diese Theilungspunkte die grade Linie CD, so ist selbige ein Durchmesser der Ellipse. Theilet man ferner die Linie CD in G in zwey gleiche Theile, und ziehet durch G, welcher der Mittelpunkt der Ellipse ist, EF parallel mit den Sehnen, so hat man den conjugirten Durchmesser zu dem zuvor bestimmten. Beschreibet man endlich aus dem Mittelpunkt der Ellipse G einen Cirkel, der die Ellipse in vier Punkten schnei-

schneidet, und ziehet durch diese vier Punkte vier Sehnen, so sind selbige parallel mit den Axen, die man sonach durch den Mittelpunkt der Ellipse ziehen kann.

§. 260.

Der Flächen-Inhalt der Ellipse ist einem Cirkel gleich, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist, zwischen den beyden conjugirten Axen der Ellipse.

Der Fläche ANP (Fig. 59.) Fluxion Np verhält sich zur Fluxion Mp der Fläche AMP, wie PN : PM = CD : CB (§. 240.), und da dieses allezeit statt hat, so ist die Fläche des Cirkels ADa zur Fläche der Ellipse ABa, wie CD : CB. Es sey R die mittlere Proportionallinie zwischen CD und CB oder ÷÷ CD, R, CB, so ist $CD : CB = CD^2 : R^2 =$ die Fläche des Cirkels ADa : Fläche der Ellipse ABa, oder wie der Cirkel ADa zu einem Cirkel, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen beyden halben Axen ist.

§. 261.

Wenn die Schnitte CM, LD (Fig. 60.) parallel mit der Grundfläche des Kegels geschehen, so sind es Cirkel; durchschneiden sie zu gleicher Zeit den Schnitt AB in HK, EF, so ist HK parallel mit EF, HK senkrecht auf den Durchmesser des Cirkels LD, und EF senkrecht auf CM, und demnach HI = IK, und EG = GF. Gesetzt der Schnitt

CM läge so, daß $AG = GB$, und es sey $AG = a$, $GE = GF = b$, $GM = c$, $CG = d$, $GI = x$, $IK = y$, so ist $IB = a + x$, und $AI = a - x$ Da nun $\triangle BGM \backsim \triangle BID$, so ist $BG : GM = BI : ID$, das ist $a : c = a + x : \frac{ac + cx}{a} = ID$. Und da $\triangle CAG \backsim \triangle LAI$, so ist $AG : GC = AI : LI$ oder $a : d = a - x : \frac{ad - dx}{a} = LI$; $LI . ID = \frac{ad - dx}{a} . \frac{ac + cx}{a} = IK^2 = y^2$, das ist $\frac{a^2cd - cdx^2}{a^2} = y^2$. Es ist aber $cd = CG . CM = GF^2 = b^2$, folglich ist $a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2$, und demnach $a^2 - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$ oder $AI . IB : IK^2 = AG^2 : GF^2$, welches die Eigenschaft der Ellipse ist (§. 242.).

Achtes Kapitel.

Von der Hyperbel.

§. 262.

Man ziehe zwey grade Linien AB, ED (Fig. 61.) welche einander in C rechtwinklicht und in zwey Theile schneiden; aus C beschreibe man mit einem Radius, der grösser als AC ist, einem halben Cirkel PNp und errichte auf AB die Perpendikularlinie AG, welche den Halbcirkel in N schneidet. Nimmt man nun $CA : CD = AN : PM$, und ziehet PM parallel mit ED, so ist M ein Punkt in einer krummen Linie HAM, welche Hyperbel genannt wird.

§. 263.

§. 263.

Wenn man pm = PM macht und pm mit PM parallel zieht, so beschreibt man zu gleicher Zeit eine andere Hyperbel mBh, welche die entgegengesetzte Hyperbel genannt wird.

§. 264.

AB ist die grosse Axe, ED die conjugirte Axe, C ist der Mittelpunkt der Hyperbeln, A und B sind ihre Scheitelpunkte, PM, pm die Ordinaten. Wenn man CF = Cf = AD macht, so sind F, f die Brennpunkte der Hyperbel. Wenn AB = ED, so heißt die Hyperbel gleichseitig. Nimmt man ∺ AB, ED, p, so ist p der Parameter derjenigen Axe, welche in der Proportion voranstehet.

§. 265.

Wenn man in der Hyperbel eine Ordinate PM der Hauptaxe AB ziehet, so ist das Rechteck $AP.PB:PM^2 = AC^2:CD^2$ oder $= AB^2:DE^2$.

Da AN : PM = CA : CD (§. 262.), so ist $AN^2 : PM^2 = CA^2 : CD^2$. Es ist aber $AN^2 = AP.Ap = AP.PB$, folglich ist $AP.PB : PM^2 = AC^2 : CD^2 = AB^2 : DE^2$.

§. 266.

Es sey die halbe grosse Axe AC = a, die halbe conjugirte Axe CD = b, man setze den Anfang der Abscissen in C, die Abscisse CP = x, die Ordi-

nate PM $=y$, so ist AP $=x-a$, PB $=x+a$, und folglich $x^2-a^2:y^2=a^2:b^2$, woraus $y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$ folgt, eine Gleichung, die die Natur der Hyperbel ausdruckt, wenn man die Abscissen vom Mittelpunkt anrechnet. Setzet man aber AB $=a$, DE $=b$, AP $=x$, PM $=y$, so ist $ax+x^2:y^2=a^2:b^2$ oder $y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^2x}{a}$; und da $a:b=b:p=\frac{b^2}{a}$, auch $y^2=\frac{px^2}{a}+px$. Hieraus siehet man, daß in der Parabel $y^2=px$ (§. 219.), in der Ellipse $y^2=px-\frac{px^2}{a}$, (§. 243.) und in der Hyperbel $y^2=px+\frac{px^2}{a}$.

§. 267.

Es ist aus (§. 265.) klar, daß AP.PB:AQ.QB $=$ PM^2 : QR^2.

§. 268.

Man setze CA $=a$, CD $=b$, CQ $=$ IH $=x$, QH $=$ CI $=y$, so ist $x^2-a^2:y^2=a^2:b^2$ (§. 266.) und $a^2y^2=b^2x^2-b^2a^2$; $a^2y+a^2b^2=b^2x^2$, woraus $x^2:y^2+b^2=a^2:b^2$, das ist, IH^2 : CE^2 + CI^2 $=$ AC^2 : CD^2 $=$ AB^2 : DE^2 folgt.

§. 269.

Wenn man von einem Punkt M (Fig. 62.) in einer Hyperbel nach beyden Brennpunkten F, f grade Linien ziehet, so ist der Unter-

schied beyder Linien der grossen Axe gleich, oder $Mf - MF = Aa$.

Man ziehe die Ordinate PM und setze $CA = a$, $CB = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist $FP = \pm CP \mp CF = \pm x \mp \sqrt{a^2 + b^2}$, je nachdem P unterhalb oder oberhalb F in Rücksicht auf C lieget, Pf aber allezeit $= CP + Cf = x + \sqrt{a^2 + b^2}$. Sonach wird $FM^2 = PM^2 + FP^2 = y^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$, und da $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$ (§. 266.), $FM^2 = a^2 + x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - 2x\sqrt{a^2 + b^2}$; eben so ist $fM^2 = PM^2 + fP^2 = y^2 + x^2 + 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 = a^2 + x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} + 2x\sqrt{a^2 + b^2}$. Ziehet man aus diesen beyden Ausdrücken die Quadratwurzel, so ist

$$fM = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} + a$$

$$FM = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - a$$

und die Differenz $fM - FM = 2a = Aa$.

§. 270.

Diesem Lehrsatz zufolge kann man die Hyperbel so verzeichnen, wenn die beyden Axen Aa und 2CB gegeben sind: Man suchet die Brennpunkte F, f, (§. 264.), nimmt den Winkel AfD nach Gefallen an, und macht $fD = Aa$. Aus dem Punkte f beschreibt man mit einem Radius der grösser, als fA ist den Bogen MmE, welcher fD in E durch-

schneidet. Nimmt man nun FM oder Fm = ED an, so sind M, m Punkte in einer Hyperbel, deren Axen Aa und 2CB sind.

§. 271.

Wenn man aus einem Punkt der Hyperbel M (Fig. 63.) nach den Brennpunkten F, f grade Linien Mf, MF ziehet, und den Winkel fMF vermittelst der graden Linie MT in zwey gleiche Theile theilet, so ist MT eine Tangente der Hyperbel in M.

Man ziehe aus einem andern Punkt m in der Linie MT die Linien mf, mF und setze fD = Aa, so ist MD = MF (§. 270.). Man ziehe die Linie DF, welche MT in G durchschneidet, so ist DG = GF und die Winkel bey G sind rechte: folglich ist mD = mF, mD + Df = Aa + mF. Es ist aber mD + Df > mf oder mf < mD + Df, folglich ist mf < Aa + mF und also mf - Fm < Aa. Derowegen liegt der Punkt m ausserhalb der Hyperbel (§. 269.) und folglich ist MT eine Tangente der Hyperbel in M.

§. 272.

Wenn eine Tangente MT die grosse Axe in T und die kleine in t schneidet, und man die Ordinaten MP, Mp ziehet, so ist CP : CA = CA : CT und Cp : CB = CB : Ct.

Man ziehe aus den Brennpunkten F, f die Linien FG, fg senkrecht auf die Tangente MT, so ist

MF:

$MF : Mf = TF : Tf$ und $MF + Mf : MF = Ff : TF$, das ist (§. 269.) $\frac{2x\sqrt{a^2+b^2}}{a} : \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} - a = 2\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{x} = TF$, folglich $CT = CF - TF = \frac{a^2}{x} = \frac{AC^2}{CP}$ und $CP : CA = CA : CT$.

Da ferner pM parallel mit CF ist, so hat man $pM : CT = pt : Ct$, und daraus $pM - CT : CT = pC : Ct$, das ist $x - \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x} = y \left(= \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right.$, (§. 266.)$\left.\right) : \frac{a\,b}{\sqrt{x^2-a^2}} = Ct$. Es ist aber $Cp = \frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ und $CB = b$, und $Cp : CB = CB : \frac{a\,b}{\sqrt{x^2-a^2}}$, folglich auch $Cp : CB = CB : Ct$.

§. 273.

Wenn die grosse Axe Aa oder die kleine Axe Bb nebst einem Punkt in der Hyperbel M gegeben ist, so kann man mit Hülfe dieses Lehrsatzes eine Tangente an dem Punkte M ziehen.

§. 274.

Wenn man durch den Scheitelpunkt A (Fig. 64.) der Hyperbel eine Parallele FG mit der conjugirten Axe DE ziehet, AF = AG = DC macht, und die Linien CF, CS vorwärts und rückwärts unbestimmt ausziehet, so nennt man diese Linien QCq, GCS die Asymptoten der entgegengesetzten Hyperbeln.

§. 275.

Wenn man mit der conjugirten Axe DE eine Parallele ziehet, welche die Hyperbel in zweyen Punkten schneidet und von den Asymptoten in R und S geschnitten wird, so ist $RM . MS = F^2A = DC^2$.

Man setze $CA = a$, $CD = AF = b$, $CP = x$, $PM = y$. Da $\triangle CAF \backsim \triangle CPR$, so ist $CA : AF = CP : PR$, oder $a : b = x : PR = \frac{bx}{a}$; $PR - PM = \frac{bx}{a} - y = RM$, und $PR + PM = \frac{bx}{a} + y = MS$. Demnach hat man $RM . MS = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2$; es ist aber $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ und also $RM . MS = b^2 = FA^2 = DC^2$.

§. 276.

Hieraus folget, daß wenn man SV in derselben oder in der entgegengesetzten Hyperbel parallel mit DE ziehet, so ist gleichfalls $sm . mr = RM . MS = DC^2 = RH . HS$, und $RM = HS$.

§. 277.

Wenn man durch mehrere Punkte M, m, μ einer Hiperbel oder zweyer entgegengesetzter Hyperbeln die Linien QT, qt, $\chi\theta$, welche sich in den Asymptoten endigen, mit einander parallel zieher, so sind die Rechtecke QM . MT, qm . mt, $\chi\mu . \mu\theta$ einander gleich.

Denn

Denn △ RMQ ∽ △ rmq, und △ MTS ∽ △ mts, hieraus folgt RM : mr = QM : mq, und MS : ms = MT : mt und weiter RM . MS : rm . ms = QM . MT : qm . mt (§. 79.). Es ist aber RM . MS = rm . ms (§. 276.), folglich ist RM . MT = qm . mt = $\chi\mu \cdot \mu\theta$.

§. 278.

Wenn man durch zwey Punkte M, μ einer Hyperbel oder der entgegengesetzten Hyperbeln zwey gerade Linien MT, $\mu\theta$ mit einander parallel ziehet, und durch eben diese Punkte zwey andere Parallellinien MV, $\mu\varrho$ ziehet, so sind die Rechtecken VM . MT und $\varrho\mu \cdot \mu\theta$ einander gleich.

Denn △ RVM ∽ △ $\varrho\lambda\mu$ und △ MTS ∽ △ $\mu\theta\nu$, deswegen ist RM : $\lambda\mu$ = VM : $\varrho\mu$, und MS : $\mu\nu$ = MT : $\mu\theta$, woraus man RM . MS : $\lambda\mu \cdot \mu\nu$ = VM . MT : $\varrho\mu \cdot \mu\theta$ erhält. Es ist aber RM . MS = $\lambda\mu \cdot \mu\nu$ (§. 276.), derowegen ist VM . MT = $\varrho\mu \cdot \mu\theta$.

§. 279.

Eine Hyperbel AMN (Fig. 65.) in Rücksicht auf ihre Asymptoten CB, CD betrachtet, wird die Hyperbel zwischen den Asymptoten genannt. Zieht man die halbe grosse Axe CA, und durch den Scheitelpunkt A die Linien AB, AD, welche in D und B von den Asymptoten geschnitten werden, parallel mit den Asymptoten, so ist BD ein

gleich

gleichseitiges Parallelogram, und man nennt die Quadrate von dessen Seiten AD oder CD die Potenz der Hyperbel.

§. 280.

Es sey die Seite der Potenz der Hyperbel $= AD = a$; man nehme die Abscissen, von dem Mittelpunkt der Hyperbel angerechnet, auf der einen Asymptote, nemlich $CP = x$, und ziehe die Ordinaten $PM = y$ parallel mit der andern Asymptote; da nun (§. 279.) $CD \cdot DA = CP \cdot PM$, so ist $a^2 = xy$, welches die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten ist.

§. 281.

Wenn der Asymptotenwinkel und die Seite der Potenz der Hyperbel gegeben, die Hyperbel zwischen den Asymptoten zu zeichnen.

Aus dem Asymptotenwinkel BCD und der Seite der Potenz der Hyperbel CD zeichne man ein gleichseitiges Parallelogram. Man verlängere die Linie BA unbestimmt, bemerke auf ihrer Verlängerung mehrere Punkte E, F, und hänge selbige mit dem Mittelpunkt der Hyperbel C durch die Linien CE, CF, welche AD in m und n schneiden, zusammen. Ziehet man hierauf EP, FQ parallel mit der Asymptote CB und nimmt die Ordinaten PM, QN gleich Dm, Dn an, so sind die Punkte M, N in der Hyperbel.

Denn

Denn es sey AD = a, CP = x, PM = y. Da nun CP : PE = CD : Dm, das ist, x : a = a : y, so ist $xy = a^2$ und folglich AMN eine Hyperbel.

§. 282.

Wenn man durch I eine Linie KL ziehet, welche die Asymptoten in K und L schneidet, und macht KH = IL so ist auch H ein Punkt in der Hyperbel. Zieht man OR parallel mit HL, so daß sie die Hyperbel berühret, so ist OG = GR.

§. 283.

Durch einen gegebenen Punkt G in einer Hyperbel, deren Asymptoten gegeben sind, eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe GH parallel mit der einen Asymptote, mache OH = CH und ziehe OGR. Hierdurch wird nun OG = GR und folglich ist OR eine Tangente der Hyperbel in G.

§. 284.

Wenn man zwey Durchmesser Aa, DE (Fig. 66.) hat, wovon der eine DE parallel mit der Tangente FG geht, die durch das Ende des andern Durchmessers A gezogen ist, und der in D und E durch zwey Parallellinien mit den Asymptoten AD und AE durchschnitten wird, so nennt man die beyden Durchmesser Aa, DE **conjugirte Durchmesser.** Und wenn man durch einen Punkt M in der Hyperbel MP parallel mit FG oder DE ziehet,

ziehet, so wird MP, welche in P den Hauptdurchmesser Aa durchschneidet, eine Ordinate dieses Durchmessers genannt.

§. 285.

Das Quadrat einer jeden mit der Tangente FG parallel gezogenen Ordinate PM verhält sich zu dem Rechteck aus AP und Pa, wie das Quadrat des conjugirten Diameters DE zu dem Quadrat des Hauptdiameters Aa; oder $Aa^2 : DE^2 = aP . PA : PM^2$.

Es sey $AC = Ca = a$, $DC = CE = FA = AG = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist $AP = x - a$, und $aP = x + a$. Da nun $\triangle CAF \backsim \triangle CPQ$, so hat man $AC : AF = CP : PQ$ oder $a : b = x : PQ = \frac{bx}{a}$, und also $QM = PQ - PM = \frac{bx}{a} - y$, und $MT = \frac{bx}{a} + y$; demnach ist $QM . MT = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2, = CD^2 = b^2$; $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; $b^2x^2 - a^2b^2 = a^2y^2$, und $x^2 - a^2 : y^2 = a^2 - b^2$, das ist $AP . Pa : PM^2 = AC^2 : DC^2$ oder $= Aa^2 : DE^2$.

§. 286.

Also ist die Eigenschaft der Hyperbel, welche zuvor (§. 265.) in Absicht auf die Axen erwiesen worden, eine allgemeine Eigenschaft für alle conjugirte Durchmesser.

§. 287.

In einer gegebene Hyperbel MAN (Fig. 67.) den Mittelpunkt C, die Hauptaxe Aa, die con-

conjugirte Axe DE und die Asymptoten RS, TV zu finden.

Man ziehe in der Hyperbel zwey paralleln Sehnen FG, fg, und theile sie in K, k in zwey gleiche Theile, so kann man durch Kk einen Durchmesser der Hyperbel ziehen, in welchem folglich der Mittelpunkt C der Hyperbel befindlich seyn muß. Ziehet man demnach zwey andere Chorden HI, hi, welche die vorigen durchschneiden, halbiret selbige in *L*, *l*, so muß der Mittelpunkt auch in der Linie *Ll* liegen und folglich ist es der Punkt C, wo Kk und *Ll* sich einander durchschneiden. Aus dem so gefundenen Mittelpunkte C beschreibe man einen Cirkelbogen, der die Hyperbel in M und N schneidet, theile MN in zwey gleiche Theile in P, und ziehe CP, welche durch den Scheitelpunkt der Hyperbel A gehet, so ist AC die halbe grosse Axe und PM eine Ordinate derselben. Auf der verlängerten AC setze man aC = AC ab, so ist Aa die grosse Axe. Durch C ziehe man die Linie DE rechtwinklicht, suche die mittlere Proportionallinie zwischen aP und PA $= \sqrt{aP.PA}$, schliesse $\sqrt{aP.PA} : AC = PM : CD$, und mache CE = CD, so ist DE die conjugirte Axe. Ziehet man endlich DA, AE und mit denselben die Parallellinien RS, TV durch *C*, so hat man die Asymptoten der Hyperbel, und kann nachmals die entgegengesetzte Hyperbel zwischen denselben beschreiben.

Daß

Daß $CD = \frac{AC \cdot PM}{\sqrt{aP \cdot PA}}$ sey, erhellt so: Setzt man $AC = Ca = a$, $DC = CE = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist $y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$ (§. 266.) und demnach $\frac{a^2 y^2}{x^2 - a^2} = b^2$, $b = \frac{a\, y}{\sqrt{(x+a)(x-a)}}$, das ist $CD = \frac{AC \cdot PM}{\sqrt{aP \cdot PA}}$.

§. 288.

Wenn man einen Kegel (Fig. 68.) mit einer Ebene schneidet, so daß die Ebene in H durch die über die Spitze verlängerte Seite des Kegels CA geht, so ist der Schnitt DKEF eine Hyperbel.

Es sey ABC ein Schnitt durch die Axe des Kegels, welcher rechtwinklicht auf die Ebene DKE steht, und GFH eine Linie, die beyde in ihrem Durchschnitt gemein haben. Man schneide ferner den Kegel mit der Ebene MKN parallel mit der Grundfläche, so ist MKN ein Cirkel und die Winkel MLK, KLF, FGD, BGD sind rechte Winkel. Der Natur der Cirkels zufolge ist $KL^2 = ML \cdot LN$ und $DG^2 = BG \cdot GC$. Da nun $\triangle FML \backsim \triangle FGB$, so ist $FL : FG = ML : BG$ und da $\triangle HLN \backsim \triangle HGC$, so ist $LH : GH = LN : GC$, folglich $FL \cdot LH : FG \cdot GH = ML \cdot LN : BG \cdot GC$ oder $= KL^2 : DG^2$. Da nun diese Proportion eine Eigenschaft der Hyperbel ist, (§. 267.), so folgt, daß der Schnitt DFE eine Hyperbel ist, worin HF die grosse Axe ist.

§. 289.

Zwischen zwey gegebenen Linien a und b vermittelst des Cirkels und der Parabel, zwey mittlere Proportionallinien x und y zu finden.

Ueber die grade Linie AQ (Fig. 69.) beschreibe man eine Parabel AM mit dem Parameter b. In A richte man die Perpendikularlinie AK $= \frac{1}{2}a$ auf, und ziehe KC $= \frac{1}{2}b$ parallel und in einerley Richtung mit AQ. Man nehme C zum Mittelpunkte an, und beschreibe durch A einen Cirkel, der die Parabel in M schneidet, ziehe MQ senkrecht auf AQ, so ist AQ $= x$, QM $= y$ und $\div\div$ a, x, y, b.

Der Natur der Parabel zufolge ist $y^2 = bx$, (§. 219.). Man setze, der Cirkel schneide AQ in E und QM in D, man verlängere die Linie KC, so wird die Sehne MD in B in zwey gleiche Theile getheilet. Ziehet man CF parallel mit AK, so wird die Sehne AE in F in zwey gleiche Theile getheilet. Demnach ist AE $=$ 2KC $=$ b, und EQ $=$ AQ $-$ AE $= x - b$, MB $=$ QM $-$ AK $= y - \frac{1}{2}a$, MD $=$ 2MB $= 2y - a$, QD $=$ QM $\mp$ MD $= a - y$. Der Natur des Cirkels zufolge ist AQ . QE $=$ MQ . QD (§. 155.) oder $x(x-b) = y(a-y)$, $x^2 - bx = ay - y^2$; es ist aber $y^2 = bx$, derowegen ist $x^2 = ay$ und $a : x = x : y$, wie auch $x : y = y : b$ oder $\div\div$ a, x, y, b.

Neuntes Kapitel.

Anwendung der Stereometrie und der Kegelschnitte zur Erfindung des Inhalts verschiedener körperlicher Figuren.

§. 290.

Aus der gegebenen Sehne DE und Höhe AF des Cirkelabschnitts DAE (Fig. 70.) den Inhalt des dadurch bestimmten Ausschnittes AECD und Abschnittes AEFD zu finden.

Man theile die Sehne DE in F in zwey gleiche Theile, und ziehe AFB senkrecht auf DE. Man schliesse AF:FE=FE:FB (§. 151.), so hat man den Durchmesser des Cirkels AB=AF+FB, und eben so dessen Radius AC. Man ziehe CD, CE und messe den Winkel DCE, der sich zu 4 rechten Winkeln verhält, wie der Bogen DAE zu der ganzen Peripherie. Man suche den Inhalt des ganzen Cirkels (§. 158.) und schliesse: wie die Peripherie zum Bogen DAE, so der Inhalt des Cirkels zum Inhalt des Ausschnitts.

Man suche ferner den Inhalt des Dreyecks DCE und subtrahire selbigen von dem Ausschnitt, wenn er kleiner als der halbe Cirkel, addire ihn aber, wenn der Ausschnitt grösser, als der halbe Cirkel, so ist die Differenz oder die Summe der Inhalt des Abschnitts.

§. 291.

Den Inhalt des Ausschnittes aus einem Cylinder oder aus einem abgekürzten Kegel zu finden.

Man suche den Inhalt der Grundfläche IHK des cylindrischen Ausschnitts CIKHFG (Fig. 72.), welche ein Cirkelausschnitt ist, (§. 290.) und multiplicire sie mit der Höhe des Cylinders CI, so hat man den Inhalt des cylindrischen Ausschnitts.

Der Ausschnitt des abgekürzten Kegels CFHGDE (Fig. 71.) hat ungleiche aber ähnliche Cirkelausschnitte zu Grundflächen, deren Radien GF und DC sind. Man suche den Inhalt der grössern Grundfläche; diese sey $= A^2$, die kleinere $= B^2$. Nun ist $IF^2 : DC^2 = A^2 : B^2 = \frac{A^2 . DC^2}{GF^2}$. Man setze die Höhe $CF = a$, so ist (§. 197.) der Inhalt des Ausschnitts aus dem abgekürzten Kegel $= \frac{1}{3} a (A^2 + B^2 + AB)$.

§. 292.

Den körperlichen Inhalt einer Figur, die auswendig die Gestalt eines cylindrischen Ausschnitts hat, inwendig aber mit einem Ausschnitt eines abgekürzten Kegels ausgehöhlt ist, oder umgekehrt, zu finden.

Man suche den körperlichen Inhalt sowohl des äussern als des innern Ausschnitts, ziehe den innern von dem äussern ab, so ist der Rest der körperliche Inhalt der zu berechnenden Figur.

§. 293.

In der Fortification braucht man diese Aufgabe zur Berechnung des körperlichen Inhalts der Bekleidungsmauern unter den runden Flanken, dem Orillon und der Kontrescarpe.

§. 294.

Den Inhalt einer körperlichen Figur zu finden, die zur Grundfläche eine reguläre Figur BEFDHG (Fig. 73.) hat, und die an den Seiten von Cylindrischen Flächen BAE, EAF u. s. w. eingeschlossen ist, deren gemeinschaftliche Schnitte AB, AE, AF der vierte Theil einer Cirkelperipherie sind.

Schneidet man diesen Körper parallel mit der der Grundfläche, so ist der Schnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur. Gesetzt dieser Schnitt ginge durch den Punkt M im Quadranten AMBC, so ist PM der Radius des Cirkels, in welchen die Figur des Schnitts eingeschrieben werden kann, und BC der Radius des umschriebenen Cirkels der Grundfläche. Nun verhält sich der Inhalt der Grundfläche zum Inhalt des Schnittes wie $BC^2 : PM^2$ (§. 162.); setzt man also $AC = BC = a$, $CP = x$, $PM = y$, so ist die Fluxion y^2dx der Fluxion der körperlichen Figur proportional, und folglich auch die Fluente $\int y^2dx$ proportional der Fluente des Körpers. Da aber ABC ein Viertelscirkel ist, so ist $a^2 = x^2 + y^2$ und $y^2 = a^2 - x^2$, folglich

lich $y^2dx = a^2dx - x^2dx$ und $\int y^2dx = a^2x - \frac{1}{3}x^3$. Setzet man nun $x = a$, so ist $\int y^2dx = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$, und wenn man a^2 als die Grundfläche des Körpers BEFDHG ansieht, so ist der Inhalt desselben $= \frac{2}{3}$ AC $\times$ Grundfläche BEFDHG.

§. 295.

Wäre der gemeinschaftliche Schnitt AMBC (Fig. 74) der krummen Flächen BAE, BAF, die eine körperliche Figur mit einer regulären Grundfläche BEDF einschliessen, ein elliptischer Quadrant BA, worin AC die kleine und BC die grosse Axe, so bringe man um die Höhe AC eine andere körperliche Figur an, deren Schnitte der Seitenflächen ANG Viertelscirkel sind, und deren Grundfläche HG der Grundfläche der ersten Figur ähnlich ist, und mit ihr zusammenfällt. Macht man hierauf in beyden Figuren durch M einen Schnitt parallel mit der Grundfläche BD, so verhält sich der Schnitt der äussern Figur zu dem Schnitt der innern, wie $MP^2 : NP^2$. Es sey $AC = a$, $BC = b$, $CP = x$, $PN = y$, $PM = z$, so ist die Fluxion der innern körperlichen Figur zur Fluxion der äussern, wie $y^2dx : z^2dx$. Der Natur des Cirkels und der Ellipse zufolge ist, $y : z = b : a$, $y^2 : z^2 = b^2 : a^2$, mithin $z^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$ und $y^2dx : z^2dx = y^2dx : \frac{a^2y^2dx}{b^2}$, woraus folgt $\int y^2dx : \int zdx = \int y^2dx : \frac{a}{b^2} \int ydx$. Nun ist (§. 294.) $\int y^2dx = \frac{2}{3}$ AC $\times$ Grundfläche

HG,

HG, wenn $x=b$, folglich ist der Inhalt der Figur BADFE $= \frac{2a^2}{3b^2}$ AC $\times$ Grundfläche GH. Es ist aber Grundfläche GH : Grundfläche BD $= b^2 : a^2$, folglich ist die Grundfläche GH $= \frac{b^2}{a^2} \times$ Grundfläche BD, und demnach der Inhalt des Körpers BADFE $= \frac{2}{3}$ AC $\times$ Grundfläche BD.

§. 296.

Hieraus erhellet, daß die Berechnung dergleichen körperlichen Figuren einerley ist, die Schnitte der gemeinschaftlichen Seitenflächen mögen Cirkel oder Ellipsen seyn, nemlich daß man in beyden Fällen die Grundfläche mit $\frac{2}{3}$ der Höhe multipliciren müsse. Hierdurch läßt sich der Inhalt derjenigen Gewölber ziemlich genau finden, die mit den gedachten Figuren beynahe übereinstimmen.

§. 297.

Wenn man einen Cylinder in schiefer Richtung schneidet, dergestalt daß die schneidende Ebene von der einen Grundfläche einen Cirkelabschnitt wegnimmt, die andere aber nicht erreichet, so nennt man das von dem Cylinder weggeschnittene Stück einen hufförmigen Abschnitt (ungula cylindrica), der von einem Cirkelabschnitt ADBA, (Fig. 75.), einem elliptischen Abschnitt BFEGA und einem Theil der krummen Oberfläche des Cylinders eingeschlossen ist.

§. 298.

§. 298.

Wenn der Cirkelabschnitt ADBA ein halber Cirkel ist, so ist der elliptische Abschnitt BFEGA auch eine halbe Ellipse. Denn wenn eine Ebene einen Cylinder schief schneidet, so ist der Schnitt eine Ellipse, welches aus eben den Gründen erwiesen wird, woraus zuvor (§. 261.) erwiesen ist, daß ein solcher Schnitt des Kegels eine Ellipse sey.

§. 299.

Den Inhalt und die Oberfläche eines hufförmigen Abschnitts zu finden, dessen Grundfläche ADB ein halber Cirkel ist.

Man errichte CD, CE senkrecht auf AB in den Ebenen ADB und AEB, und ziehe DE, so ist DCE ein Dreyeck. Durch M schneide man den hufförmigen Abschnitt mit einer Ebene parallel mit dem Dreyeck DCE, so ist auch MPN ein Dreyeck, welches dem Dreyeck DCE ähnlich ist. Denn der Natur des Cirkels und der Ellipse zufolge ist $AC^2 : AP.PB = DC^2 : PM^2 = CE^2 : PN^2$ und also $DC : CE = MP : PN$. Man setze $DC = CA = a$, $CE = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist die Fluxion des hufförmigen Abschnitts $\triangle MPNxdx$ proportional y^2dx; nun ist $y^2 = a^2 - x^2$ (§. 152.), demnach die Fluxion des Abschnitts proportinal mit $a^2dx - x^2dx$, und folglich dessen Fluente $a^2x - \frac{1}{3}x^3$. Man setze $a = x$, so ist der körperliche Inhalt des hufför-

migen Abschnittes proportional mit $\frac{2}{3}a^3$ und $=\frac{2}{3}AC + \triangle DCE = \frac{1}{3}AB + \triangle DCE$, das heißt, er ist gleich dem Inhalt des Dreyecks DCE multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ des Radius AC.

Stellt man sich den hufförmigen Abschnitt durch Ca und CE mit einer Ebene geschnitten vor, und siehet Aa als einen unendlich kleinen Bogen an, so ist das abgeschnittene Stück, nemlich eine unendlich kleine Pyramide, die ihre Spitze in C hat und deren Höhe AC ist, die Fluxion des hufförmigen Abschnitts. Demnach ist der ganze Abschnitt einer Pyramide gleich, deren Höhe $=AC$, und deren Grundfläche die cylindrische Fläche des Abschnittes ist, und wenn man letztere durch z^2 ausdrücket, $=\frac{1}{3}az^2$. Da nun der Inhalt desselben zuvor $=\frac{2}{3}a\triangle DCE$ gefunden, so ist $\frac{1}{3}az^2 = \frac{2}{3}a.\triangle DCE$, folglich $z^2 = 2\triangle DCE = DE.CE$. Hieraus folgt, daß die ganze Oberfläche des hufförmigen Abschnittes gleich dem Rechteck DC.CE + dem Flächen-Inhalt des halben Cirkels ADB + dem Inhalt der halben Ellipse AEB. Nun ist die Cirkelfläche zur Fläche der Ellipse wie a:b, demnach die Fläche der Ellipse $=\frac{b}{a}+$ Flächen-Inhalt ADB, und also die ganze Oberfläche des hufförmigen Abschnitts $=ab+\frac{a+b}{a}+$ Flächen-Inhalt ADB.

§. 300.

Den körperlichen Inhalt einer Paraboloide, einer parabolischen Sphäroide oder Conoide zu finden, welche entsteht, indem sich eine Parabel CAB (Fig. 76.) um ihre Axe AB drehet.

Da ein Schnitt der Paraboloide parallel mit der Grundfläche ein Cirkel ist, so ist der Inhalt desselben, wie PM^2. Man setze den Parameter der Parabel $= a$, $AP = x$, $PM = y$, so ist die Fluxion der Paraboloide, wie $y^2 dx = axdx$, weil $y^2 = ax$, und die Fluente wie $\frac{1}{2} ax^2$ oder $\frac{1}{2} y^2 x$. Dem zufolge erhält man den Inhalt der Paraboloide indem man die Grundfläche CD mit der halben Höhe AB multipliciret.

§. 301.

Wenn eine gehörig geladene Mine springt, so gleicht die dadurch entstehende Aushöhlung so ziemlich einer Paraboloide. Die Menge des Pulvers, welches im Brennpunkte angebracht wird, muß nach dem Widerstande der herauszuhebenden Erdmasse eingerichtet seyn, und also muß man den Inhalt derselben wissen. Der Abstand des Brennpunktes von der Grundfläche der Paraboloide ist gegeben, wenn man weiß, wie tief das Pulver unter der Erde gelegt worden, und nach gewissen Erfahrungen soll der Radius der Grundfläche dieser Tiefe stets gleich seyn. Hieraus

aus soll nun der Parameter gefunden werden; es sey FB = BC = a, der Parameter = z, so ist AB = $\frac{1}{4}z + a$ (§. 218.) und der Natur der Parabel zufolge $\frac{1}{4}z^2 + az = a^2$; $z^2 = -4az + 4a^2$ und $z = -2a + \sqrt{8a^2} = 2a(\sqrt{2} - 1) = 0{,}8284a$. Hierdurch kann nun die Parabel beschrieben werden. Man ziehe EG durch den Brennpunkt F parallel mit der Grundfläche CD, und gedenke sich eine Ebene durch EI parallel mit der Grundfläche gelegt, so ist EAG der Theil der Paraboloide, der beym Springen der Mine durch die Pulverkraft niedergedrückt wird, und EGDC der Theil der über dem Pulver liegenden Erde, der ausgehoben wird. Dieser ist demnach eine abgekürzte Paraboloide, deren Inhalt nach der vorigen Aufgabe zu berechnen ist.

§. 302.

Den körperlichen Inhalt einer Sphäroide zu finden, welche entsteht, indem sich eine Ellipse um eine ihrer Axen drehet.

Man beschreibe über AB (Fig. 77 und 78.) einen halben Cirkel AFB, so wird dieser während der Erzeugung der Ellipse eine Kugel beschreiben, die mit der Sphäroide einerley Axe AB hat. Eine Ebene durch die conjugirte Axe auf AB senkrecht gelegt, gibt die Schnitte der Kugel und der Sphäroide, welche Cirkel sind, die zu Radien CF und CE haben; und eben so geben alle Schnitte,

te, welche mit dem vorigen parallel, z. B. längst PM, gemacht werden, Cirkel, deren Radien PN und PM sind. Der Natur der Ellipse zufolge ist nun CE : CF = PM : PN, und demnach sind $PM^2 : PN^2$ in dem beständigen Verhältniß von $CE^2 : CF^2$. Eben dieses beständige Verhältniß haben aber auch die Fluxionen der Sphäroide und der Kugel zu einander, und folglich verhalten sich die körperlichen Inhalte der Sphäroide und der Kugel wie $CE^2 : CF^2$, oder wie die Cirkel durch ihre Mittelpunkte. Nun haben beyde Körper eine gemeinschaftliche Axe, und der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Durchmessers AB multipliciret mit der Cirkelfläche, welche CF beschreibet; also ist der Inhalt der Ellipsoide gleich $\frac{2}{3}$ des Durchmessers AB multipliciret mit der Cirkelfläche, welche CE beschreibet, es mag AB die grosse oder die kleine Axe der Ellipse seyn.

§. 303.

Den körperlichen Inhalt der Hyperboloide zu finden, welche entsteht, indem die Hyperbel ADB (Fig. 79.) sich um ihre Axe beweget.

Man ziehe die Asymptoten der Hyperbel CK, CT, (§. 227.) und durch den Scheitelpunkt A rechtwinklicht durch die Axe CB die Linie FG, welche die Asymptoten in F und G durchschneidet, so ist FG der conjugirten Axe gleich (§. 274.). Man

ziehe

ziehe ferner FH parallel mit AB, und lasse die Figuren AFKB, ADB, AFHB sich um die Axe AB drehen, so beschreiben selbige einen abgekürzten Kegel, eine Hyperboloide, und einen Cylinder, welche alle einerley Höhe haben, und deren Grundflächen Cirkel sind, welche von KB, DB, und HB beschrieben worden. Ich sage, der Inhalt der Hyperboloide ist gleich dem Unterschiede zwischen dem abgekürzten Kegel und dem Cylinder.

Denn es sey ST eine Cirkelfläche, welche diese drey Körper schneidet. Nun ist $SM . MT = FA^2$ (§. 275.); wenn man aber MN senkrecht auf SM ziehet, so ist auch $SM . MT = MN^2$ (§. 151.), derowegen ist $FA^2 = MN^2$, und folglich ist die Grundfläche des Cylinders FG gleich dem Cirkel, den der Radius MN beschreibet (§. 166.). Ferner ist die Grundfläche des Cylinders einem jeden Schnitte gleich, der parallel mit der Grundfläche durch den Cylinder gemacht wird, und der Cirkel, den MN beschreibet, dem Ringe gleich, der zwischen den von S und M beschriebenen Cirkelperipherien liegt (§. 199.). Da nun dieser Ring durchgehends dem ihm entsprechenden Schnitte des Cylinders gleich ist, so ist folglich der Unterschied zwischen dem abgekürzten Kegel und der Hyperboloide dem Cylinder gleich.

§. 304.

§. 304.

Die Stereometrie ist in der Baukunst und Fortification unumgänglich nothwendig, da man ohne sie keinen richtigen Anschlag zu einem vorhabenden Baue machen kann. Man will z. E. den körperlichern Inhalt eines gewölbten Magazins wissen, wovon Fig. 83. den Grundriß, Fig. 80. 81. oder 82. aber das Profil angibt. Die Fundamentmauern machen ein rechtwinklichtes Parallelepipedum aus, dessen Grundfläche das Parallelogram FI und Höhe $=QN+NO+OT+TQ$. Die Seitenmauern sind einem Parallelepipedum gleich, welches das Rechteck FD zur Grundfläche und $QN+NO+OT+TQ$ zur Höhe hat. Die Giebel sind zwey dreyeckigte Prismen, deren jedes das Dreyeck ABC zur Grundfläche und die Dicke der Seitenwände $QR=MO$ zur Höhe hat. Für die Thüren, Fenster und Lucken ziehet man von dem Inhalt der Seitenmauern und Giebeln so viel ab, als der dazu leer gelassene Raum beträgt.

Das Gewölbe kann entweder cirkelförmig, elliptisch oder gothisch seyn. Ist es cirkelförmig oder elliptisch, so berechnet man zuerst ein Prisma, welches ABC zur Grundfläche und NQ zur Höhe hat, und subtrahiret davon einen halben Cylinder, der den halben Cirkel oder die halbe Ellipse DKE zur Grundfläche und NQ zur Höhe

hat, so bleibt der Inhalt des Gewölbes übrig. Um den Inhalt eines gothischen Gewölbes, welches auch en tiers point genannt wird, zu finden, subtrahirt man von dem Prisma, welches △ ABC zur Grundfläche und NQ zur Höhe hat, den Inhalt des leeren Raums, welches eine prismatische Figur von eben der Höhe ist, die zur Grundfläche die Summe des Dreyecks DEK und des doppelten Cirkelabschnitts DK hat.

Wenn man durch Ausrechnung des Inhalts des Mauerwerks erfahren hat, wie viele Cubicfusse es hält, und man dabey weiß, wie viele Steine, Sand und Kalk zu einem Cubicfuß erforderlich sind, so ist es leicht zu finden, wie viele Materialien von jeder genannten Art zu einem solchen Gebäude gehören.

§. 305.

Den körperlichen Inhalt eines runden Thurms zu finden, der ein Kranzgewölbe hat, das in der Mitte auf einem runden Pfeiler ruhet.

Es sey Fig. 85. der Grundriß des Thurms und Fig. 84. ein durch die Axe desselben genommenes Profil. Was demnach zuerst die Seitenmauern anlanget, so ist klar, daß man von dem kör-

körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels RSTX den Inhalt eines Cylinders abziehen müsse, der den Cirkel über den Durchmesser HI zur Grundfläche und HZ zur Höhe hat, um den Inhalt derselben zu finden. Der Pfeiler in der Mitte des Thurms ist ein Cylinder, der den Cirkel ANBP zur Grundfläche und CZ zur Höhe hat.

Aus der Figur erhellet, daß das Kranzgewölbe (voute en bourlet) der Unterschied ist, zwischen einem Cylinder HICD, der den Cirkel über den Durchmesser CD zur Grundfläche und HC zur Höhe hat, und einem anderen Körper, der da entsteht, wenn während der Zeit, daß der Radius CF um den Mittelpunkt F den Cirkel CODQ beschreibet, ein halber Cirkel, dessen Durchmesser CA und Mittelpunkt G ist, auf die Ebene CODQ senkrecht stünde, und während der Bewegung des Radius CF Spuren hinterliesse.

Den Inhalt einer auf diese Art erzeugten Figur findet man, indem man den Flächen-Inhalt des halben Cirkels, dessen Durchmesser CA ist, mit der Peripherie multiplicirt, die der Mittelpunkt desselben während der Bewegung beschreibet.

§. 306.

§. 306.

Den Grund der eben angeführten Regel weitläuftig zu erklären, verstattet der Raum hier nicht. Nur so viel will ich hier erinnern, daß sie eine Folge eines allgemeinen Satzes der Mechanik ist; daß nemlich eine jede Fläche, die von einer Linie erzeuget wird, einem Rechtecke gleich ist, wovon die eine Seite eine grade Linie ist, so groß als die gegebenen graden oder krummen Linie, und die andere Seite dem Wege gleich ist, den der Schwerpunkt der Linie während der Bewegung beschreibet. Eben so ist der Inhalt einer körperlichen Figur dem Produkte gleich, aus der erzeugenden ebenen Figur und den Raum, den ihr Schwerpunkt während der Erzeugung der körperlichen Figur durchloffen.

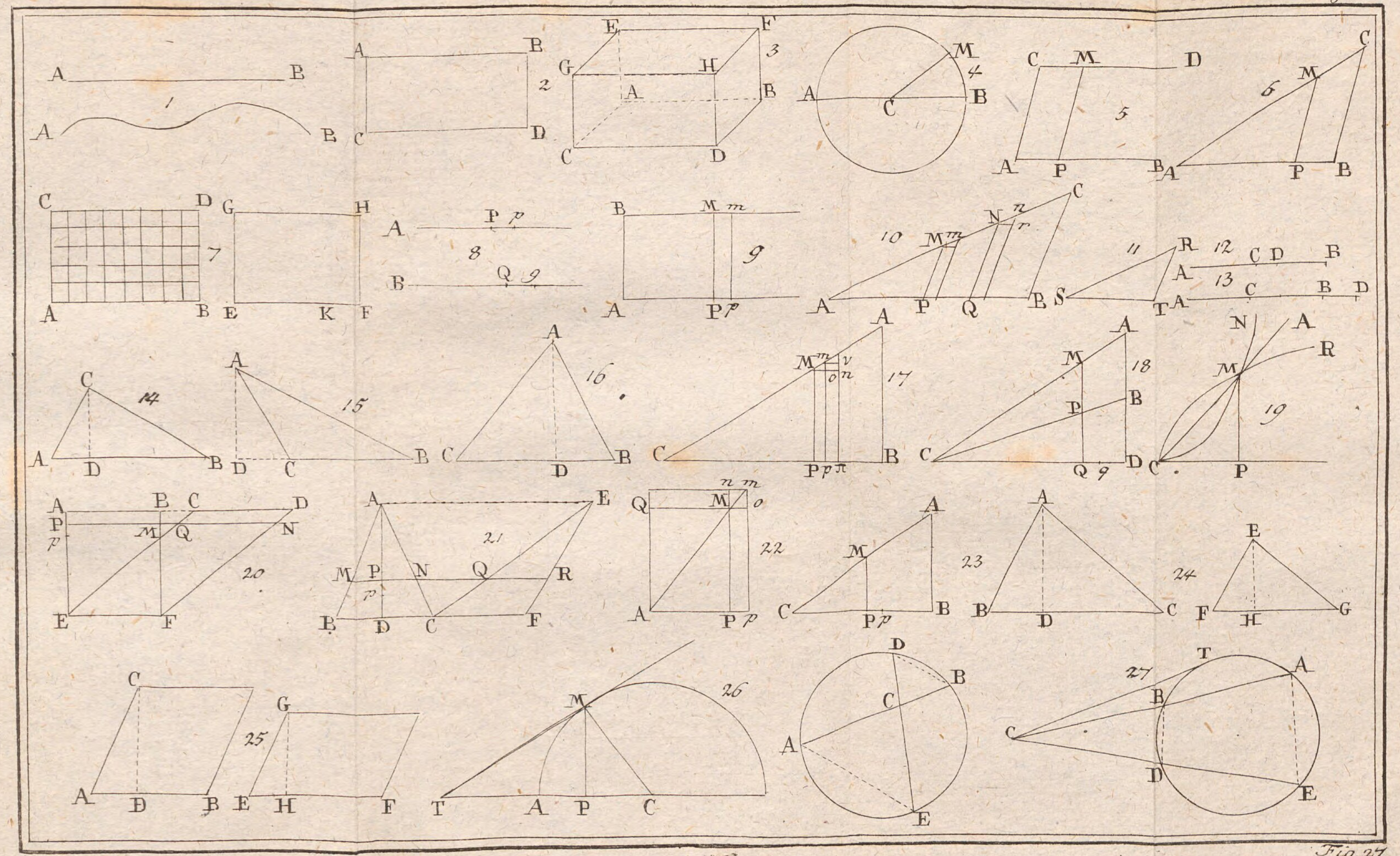

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

Fig. 28.

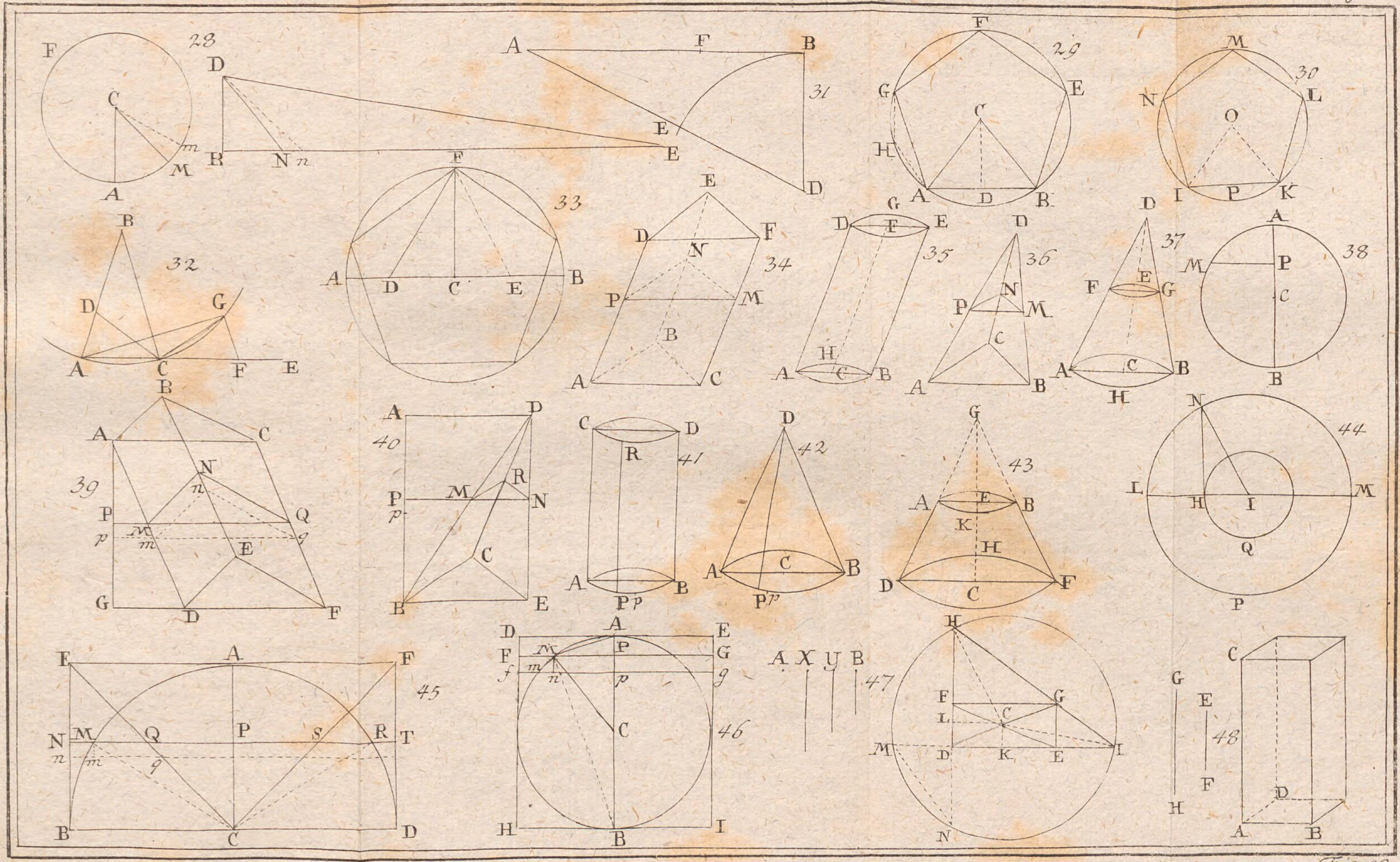


Fig. 48

Fig. 49

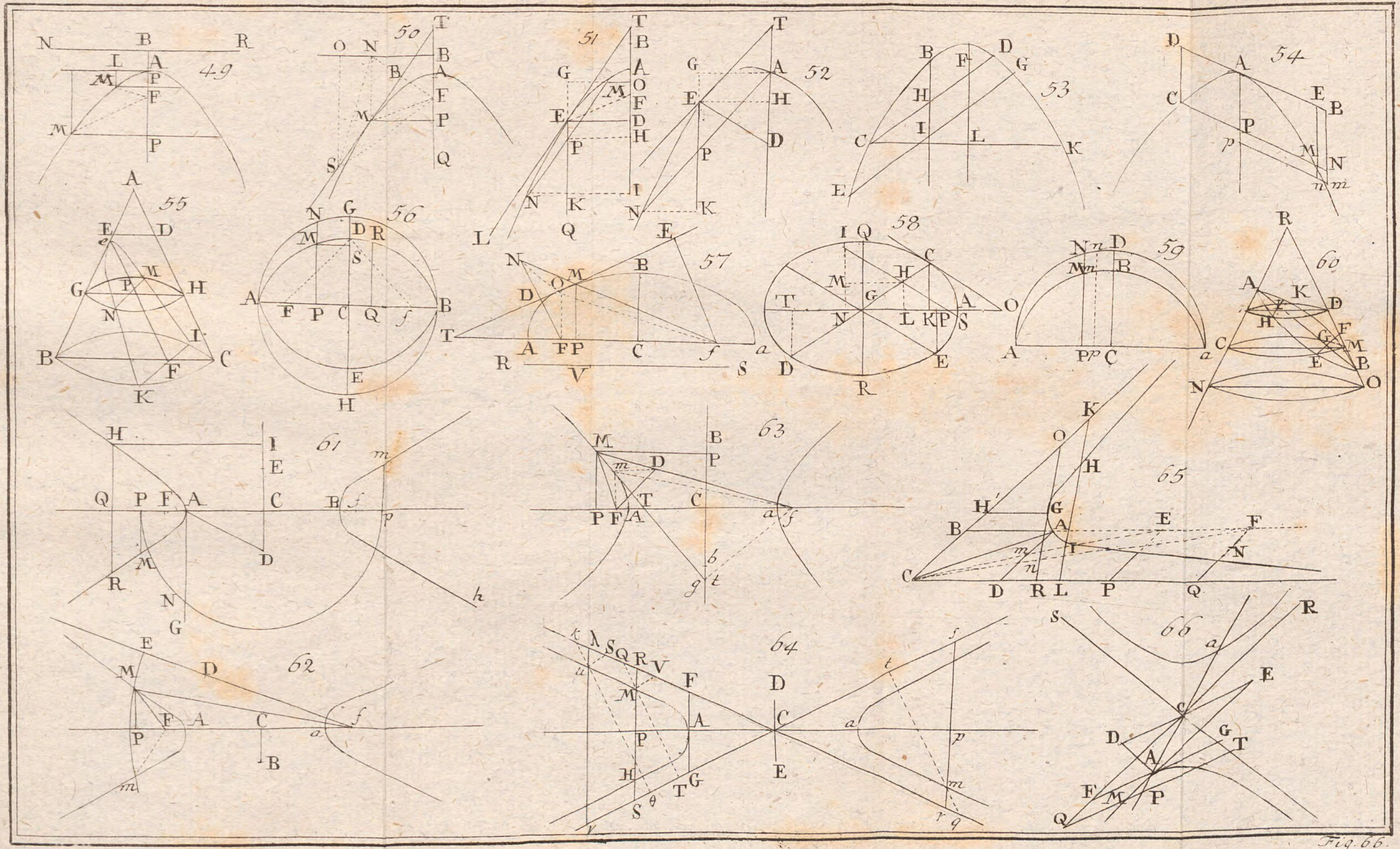
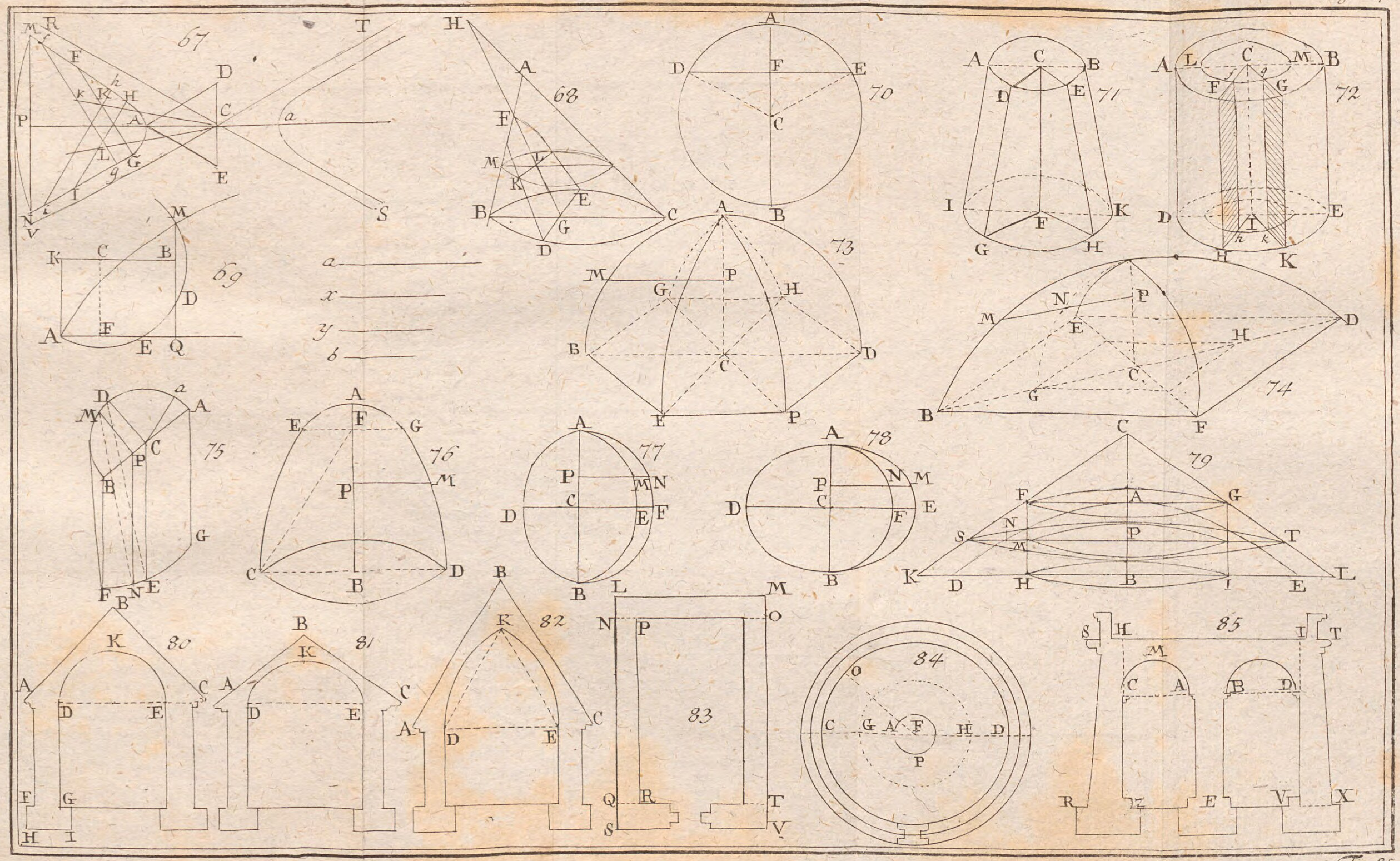


Fig. 66.


67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schenmark, Nils

Analytische Geometrie

Kopenhagen 1779

Math.p. 494
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082727-2